孤子理论

（逆问题方法）

（苏联） В. Е. 扎哈罗夫 С. В. 马纳科夫
С. П. 诺维科夫 Л. П. 皮达也夫斯基 著

科学出版社



序 言

最近15—20年，在物理学的不同领域内，对非线性波动过程进行了大量研究．这首先(除经典流体动力学问题外)涉及等离子体理论和非线性光学的各种问题．在非线性波动理论的发展过程中，出现了一些最简单的“典型”非线性波动方程，在某种意义上这些方程具有普适性质，就象经典的线性达朗贝尔方程那样，在各种物理现象问题中都可以遇到它们．例如熟知的 KdV 方程，非线性薛定谔方程和 sin-Gordon 方程，都属于这类方程．这些方程(至少在一维情形下)都具有突出的数学性质，它们含有一种隐蔽的代数对称性——利用对辅助线性算子的逆问题方法可导至“可积性”．本书主要论述这种数学方法和它的推广，因此，本书的宗旨是尽可能结合介绍一些关于诸如散射理论，黎曼曲面理论和哈密顿系统理论等等的必需知识，来对这一方法作基本论述．本书有一章是专门讨论大范围时间内解的渐近行为问题．在某些情况下，这一章的一些重要的定性结果也可用与散射理论无关(见第四章 §4)的类似于波戈留波夫等人的经典“平均值方法”而得到．

在引论中，我们将针对一些具体物理问题来推导出 KdV 方程和非线性薛定谔方程，以便说明它们的“普适性”．

逆散射问题方法最早见于 Gardner, Green, Kruskal 和 Miura 的论文[3]．目前关于逆问题方法已有几百篇文章，要对它们作综合评论是非常困难的．本书所引用的文献[1—26]，只不过是一些发展这种新方法的综述评论和论文集．作者认

为必须补充一些主要工作的文献，因为本书的内容就是以这些文章为依据的，它们是： 第一章的 [27—40]，第二章的 [41—51]，第三章的 [52—59，63]，第四章的 [60—62]．

下面我们对重要文章 [3] 发表之前的孤子理论作一些简单的历史回顾．

孤子解(对液面长波解来说)首先由 Boussineng 在 1872 年得到．1895 年，Korteweg-deVries 得到了 Korteweg-deVries (KdV)方程，并得到了它的周期性(极浅水 (cnoidul)) 波，这种波是用椭圆函数来表示的*)．在以后年代里，这些结果进一步精确化了，一直到 Лаврентьев 和 Friedrichs 严格证明了在有限深度液面上存在有孤子解；这时期的历史发展，可参阅 Stocker 写的那本非常好的书[14]．

由于等离子体物理的研究，又重新引起了对孤子的兴趣．1958 年，Сагдеев[23] 证明了孤子也可以在等离子体内传播，它完全类似于液面上的孤子．Gardner 和 Morikawa[4]确定了描述强磁场中等离子体方程和浅水波方程之间的明显类似性．从这时开始，便得到 KdV 方程的普遍物理特性不久就明确了它可以应用到各种波动问题上(参看 Whithem 专著 [15a])．同时在非线性光学领域内的进展(参看 Ахманов 和 Хохлов 的专著[1]以及 Бломберген 的专著[2])，导致了对三波参量相互作用问题的研究，稍后不久便得到了非线性薛定谔方程(参看 Кадомцев, Карпман 的文章[8])．

在发现逆问题方法之前，KdV 方程的数值模拟工作已经开始． 早在 1954 年，Fermi, Pasta, Ulam (见 [16]) 就用电子计算机研究非线性振子链的行为，发现了这种动力系统有反常慢的随机性质．1964 年，Kruskal 和 Zabusky (见 [3])

---

*) 实际上，这种波可写成椭圆函数 Cn^2 的形式，故也可叫 Cn^2 状波，但以下通译成"极浅水波"——译注．

用数字模拟方法，发现了 KdV 孤子之间的碰撞是弹性碰撞．这个结果推动了新的解析研究． 不久发现了无穷多守恒律，最后，在 1967 年，这种发展导致发现逆散射问题方法[3]．

接着由于以下工作，这种方法得到了进一步发展：在文章[3]工作的基础上很快揭开了代数机制（P. Lax 1968），然后又把 KdV 方程构成哈密顿体系（C.S. Gardner, B.E.Захров, Л.Д.Фаддеев, 1971）．70 年代初发现了其它一些能用逆问题方法进行积分的重要非线性方程，其中包括非线性薛定谔方程，sin-Gordon 方程等等． 寻找周期性解的程序，要求深入地利用哈密顿形式，并引入代数几何方法，因此到 1974—75 年才发现，甚至对 KdV 方程也是如此．文章[6]概括了这时期的进展．最近几年的发展方向是：1)发现了用逆问题方法(或它的推广)来积分的新的重要物理系统；2) 为了求解，发展了散射理论和代数几何方法；3) 建立和研究了能保持准确可积的相对论不变的量子模型．

作者认为，目前所积累的精确解的知识，还很少用来计算具体的物理效应．我们希望本书介绍的全部必要技术，将会促进这种方法的广泛应用． 毫无疑问，这种方法乃是二十世纪数学物理方面最新奇的发现之一．

作 者

目　　录

引论　弱非线性和色散

众所周知，在各种极不相同的均匀介质中，范围广泛的一类波动过程可用下列波动方程来描述：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = u_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \tag{1}$$

它描述以恒定速度 u_0 传播的非衰减波．导出这个方程利用了三种基本情况：首先，不存在耗散，这表示方程 (1) 相对于时间反演，即作 $t \to -t$ 代换是不变的．其次，振动的振幅应当足够小，在这种情况下，对振动量 ϕ 的非线性项很小，以致可以忽略。最后，在所研究的长波范围内应当不存在色散，即传播速度不依赖于频率和波长． 通常(我们将首先考虑这种情况)这相当于波长充分长的极限情况．

我们要再次强调方程 (1) 的普适性，这种方程的形式与具体介质性质无关；介质性质仅影响速度值 u_0．如果不忽略耗散、非线性和色散，这种普适性自然也就消失了．每种介质将用各自特定的方程系统来描述．但如果不完全忽略上面所指出的效应，而只是认为它们很小，那么对许多现象，可以重新得到形式相同的方程．

Korteweg-deVries 方程．首先产生的问题是，这些小修正是否会导致一些新的定性效应． 否则，这些小修正就完全没有意义了．不过很容易理解，如果过程持继时间足够长，那么上面所指出的全部效应可使解发生本质的改变． 实际上，即使是很小的能量耗散，经过足够长时间，也会导致波的衰减．色散导致波包散开，经过足够长时间，同样会使解变形，

以致模糊不清. 至于非线性效应，会导致解的"波阵面的卷缩"——这种效应同样是绝非小可的.

现在我们的目的在于得到一个近似方程，它能正确地描述这些"小修正的大效应". 这里我们仅限于讨论保守系统，仍同前面一样，这意味着完全忽略耗散.

方程(1)的解可表为两个运动方向相反的行波之和:

$$\phi = \phi_1(x - u_0t) + \phi_2(x + u_0t). \tag{2}$$

不难证明，当考虑的非线性和色散很小时，则可把两个方向的行波都看作是独立的. 其物理原因是这两个波彼此相对运动足够快，以致"修正的积累"来不及发生. 这一点可使问题大大简化. (2)中的每一个行波都满足一阶方程，其中沿 x 轴正向运动的行波满足方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

这样，我们还需要求出对这个方程的修正.

确定与色散有关的修正是最简单的. 设在我们的介质中线性波的精确色散律为

$$\omega = ku(k). \tag{4}$$

当 $k \to 0$ 时，速度 u 应趋于 u_0. 在一般情况下，$u(k)$ 是按 k 的幂次展开的解析函数. 容易理解，在不存在耗散情况下，它是按 k^2 的幂次展开的. 实际上，色散律(4)是以某个实系数的线性微分方程系统得到的. 因此这种系统的解可以表示为 $i\omega$ 依赖于 ik 的形式，其系数是实数. 为使(4)中的 ω 是实的(这表示无耗散)，u 必须按 ik 的偶次幂展开.

考虑到上述理由，当 k 很小时，仅顾及到一阶修正，函数 $\omega(k)$ 可写成:

$$\omega = u_0k - \beta k^3. \tag{5}$$

立即看出，为了得到正确的色散律(5)，对(3)式必须加上三

阶导数项：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+u_0\frac{\partial\psi}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}=0. \tag{6}$$

现在着手研究非线性．如果考虑到我们这里所研究的是保守系统，那么全部作法就方便得多了，因为保守系统总是存在某些量的精确守恒律．（实际上所谈的可以是粒子数守恒）．从这些守恒律中写出其中的一个：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=0. \tag{7}$$

（即然在线性近似中所有振动量都满足同一波动方程，因此总可以认为方程（1）正好描述守恒量ψ的扰动．）问题在于，如何用ψ来近似表示流j．从（7）与（6）中看到，在ψ的线性近似下，$j=u_0\psi+\beta\partial^2\psi/\partial x^2$．在进一步近似下会出现$\psi$的平方项：

$$j=u_0\psi+\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\alpha}{2}\psi^2,$$

其中α是常数．结果我们得到只考虑保留一阶修正的待求方程：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+u_0\frac{\partial\psi}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}+\alpha\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}=0. \tag{8}$$

现在作变量代换

$$\xi=x-u_0t,\quad \psi=\frac{\beta}{\alpha}\eta.$$

于是方程归结为标准的 KdV 方程：

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial^3\eta}{\partial\xi^3}+\eta\frac{\partial\eta}{\partial\xi}=0. \tag{8a}$$

为了避免误解，我们提醒一下，当不存在色散项和非线性项的特殊关系时，以上论述应囊括最普遍的情形．但可能有这样的情形，由于存在对称性，结果使j按ψ的展开式中可能只

有奇次项，这时在 (8a) 中出现非线性项 $\eta^2 \frac{\partial\eta}{\partial\xi}$，甚至 $f(\phi)$ 可能是更复杂的非解析关系． 上述推导 KdV 方程的过程在实际问题讨论中是很方便的，因为这可以独立地确定系数 α 和 β.

下面举几个例子来说明这种情况．首先我们确定介质的流体动力学中的系数 α，该介质的状态方程是多方指数形式：$P = C\rho^{\gamma}$. （对比热为常数的理想气体绝热运动情形 γ 值等于定压比热与定容比热之比 C_p/C_v）作为 ϕ 可选密度变化 $\rho'(\rho = \rho_0 + \rho'$，其中 ρ_0 是未扰动密度)．这时方程 (7) 相当于连续方程：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} = 0, \tag{9}$$

该方程应补充上尤拉方程

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}. \tag{10}$$

准确到二阶项，p 与 ρ' 之间的关系可写成 $p - p_0 = u_0^2\left(\rho' + \frac{\gamma - 1}{2\rho_0}\rho'^2\right)$，其中 $u_0 = (dp/d\rho)^{1/2}$ 为“未扰动”波速．因此方程组 (9)，(10) 可表示为

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(\rho' x)}{\partial x}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u_0^2}{\rho_0}\frac{\partial\rho'}{\partial x} = -\frac{u_0^2(\gamma - 1)}{2\rho_0^2}\frac{\partial\rho'^2}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x}.$$

（准确到二阶项.）从上两个方程中消去 v，为此把第一个方程对 t 微商，而通过第二个方求出 $\partial v/\partial t$，我们得到

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - u_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\rho'$$

$$= -\frac{\partial^2(\rho' v)}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}\rho_0 \frac{\partial^2 v^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{u_0^2(\gamma - 1)}{\rho_0}\frac{\partial^2 \rho'^2}{\partial x^2}. \quad (12)$$

现在对 (12) 式的左边可作相当准确的代换:

$$\frac{\partial}{\partial t} - u_0 \frac{\partial}{\partial x} \simeq -2u_0 \frac{\partial}{\partial x},$$

而 (12) 式右边假定 $\frac{\partial}{\partial t} \simeq -u_0 \frac{\partial}{\partial x}$ 及 $v \simeq \frac{u_0}{\rho_0}\rho'$. (后一近似等式可以从前者和(11)中任何一个方程中得到.)把方程左右两边的符号 $\frac{\partial}{\partial x}$ 去掉后,我们得到 α 值:

$$\alpha = \frac{\gamma + 1}{2\rho_0} u_0. \quad (13)$$

当 $T_e \gg T_i$ 时,我们把所得到的结果应用到无碰撞等离子体中的离子-声波这一重要情况. 在这种情况下,忽略离子速度的热散射,对离子可利用流体动力学方程:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{Ze}{M}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (14)$$

(M 是离子的质量). 而电子可按玻耳兹曼分布:

$$n_e = Z n_0 e^{e\varphi/T_e}$$

(n_0 为离子的平衡密度),因此位能 φ 的泊松方程为

$$\Delta\varphi = -4\pi e(Zn_i - Zn_0 e^{e\varphi/T_e}). \quad (15)$$

为了确定系数 α, 我们忽略了色散,这相当于略去 (15) 中的二阶导数项. 于是代替 (15) 得到准中性条件

$$\frac{e\varphi}{T_e} = \ln \frac{n}{n_0}.$$

从此式得出的 $e\varphi$ 代入 (14) 中,我们得到

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{ZT_e}{M}\frac{\nabla n_i}{n_i}. \quad (16)$$

这就是流体动力学方程,声速 $u_0 = \sqrt{ZT_e/M}$,多方指数 $\gamma =$

1. 因此对这种情况

$$\alpha = \frac{u_0}{Mn_0} = \sqrt{\frac{ZT_e}{M}}\frac{1}{Mn_0} \tag{17}$$

为了确定系数 β，我们把方程 (14) 线性化，而把所有量都认为 $\sim e^{i(kx-\omega t)}$：

$$-i\omega v = -ikZe\varphi/M,$$

利用泊松方程

$$\left(\frac{4\pi Zn_0e^2}{T_e} + k^2\right)\varphi = 4\pi Zen_i'$$

和连续性方程

$$-i\omega n_i' + ikn_0v = 0.$$

使上面方程组行列式等于零，我们便求出色散律

$$\omega = \sqrt{\frac{ZT_e}{M}}k(1 + k^2D^2)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{ZT_e}{M}}k - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ZT_e}{M}}k^3D^2,$$

其中 $D = \sqrt{T_e/(4\pi Zn_0e^2)}$ 是等离子体中电子的德拜屏蔽半径. 因此，我们确定了方程 (8) 在这种情况下的第二个系数：

$$\beta = 1/2D^2\sqrt{ZT_e/M}. \tag{18}$$

应用 KdV 方程的经典例子乃是波在浅水中传播问题. (Korteweg 和 de Vries 在 1895 年正是就这个问题得出了这个方程.) 首先考虑求系数 α，因此我们写出长波极限情形下的方程 ($k\to 0$). 设 h 为流体振动层的厚度. 当认为液体是不可压缩时及考虑到浅水层液体实际上顺着表面流动，我们写出连续性方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hv)}{\partial x} = 0. \tag{19}$$

而速度方程为

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -g\frac{\partial h}{\partial x}, \tag{20}$$

因为随着 h 的改变，液体势能改变量为 $dU = g\rho dh$.

因而，如果把 h 看作密度，而压力等于 $gh^2/2$，那么方程组(19)，(20)形式上又同流体动力学方程组一致．于是

$$u_0 = \sqrt{gh_0}, \quad \nu = 2, \tag{21}$$

因此在 h' 的方程中

$$\alpha = 3/2\sqrt{g/h_0}.$$

为了确定系数 β，需解厚度为 h_0 的液层中以有限波长振动的线性化问题．对这种情况，(参看[14])色散律为

$$\omega \simeq \sqrt{gh_0}\ [k - 1/2(kh_0)^2].$$

因此，在这种情况下

$$\beta = 1/2\sqrt{gh_0}\ h_0^2. \tag{22}$$

非线性薛定谔方程．一般来讲，在上面讨论波的传播方程中，其非线性项同流体动力学中的非线性项有着共同的特点，二者都是用同一时刻的振动量及其导数来表示的．因此可以说，这些非线性项具有“定域”性质．倘若初始扰动为关于时间的谐波，那么这种类型的非线性项便触发高频波的迅速出现，从而使初始谐波轮廓变形．

不过，还存在另外一种类型的非线性．例如，研究电子等离子体振荡.(这个例子下面将作定量研究，这里我们感兴趣的只是现象的一般特点.)这些振荡以电子等离子体频率 $\omega_0 = \sqrt{4\pi n_e e^2/m}$ 进行．离子由于本身质量很大，实际上将不参与这种振荡.但由于要保持电中性，这样离子密度应等于电子密度，因此电子就不能有频率量级为 ω_0 这样大的振动分量.然而，这不妨碍等离子体密度会发生变化，因为场施加在等离子体上的按时间平均的作用力会引起等离子体密度改变.这样，在一阶近似下与时间无关的扰动将由依赖于场的量的时间平均值来确定.在与谐波区别不大的弱场中，这意味着色散律依

赖于 $|\psi_0|^2$，其中 ψ_0 在这里表示场 $\psi=\psi_0\exp[i(kx-\omega t)]$ 的复数振幅. 在加热介质时，容易产生这种类型的非线性，因为当 $\omega\gg\nu$ 时（ν 为有效碰撞数），温度跟不上场的振动，而是由振动场的平均值来确定它.

不难得到与谐波差别不大的这类场（考虑到这种场的弱非线性修正）的方程. 假设这类场取为

$$\psi=\psi_0 e^{i(k_0x-\omega_0t)}, \tag{23}$$

式中 ψ_0 是时空的慢变函数. 于是，在场的谱展开中，波矢将仅在 k_0 附近. 因此，色散方程 $\omega=\omega(k)$ 的右边可按 $k-k^0$ 的幂次展开:

$$\omega=\omega(k_0)+u_0(k-k_0)+\beta(k-k_0)^2. \tag{24}$$

对应这种色散律的线性方程

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\omega_0\psi+u_0\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}-k_0\right)\psi+\beta\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}-k_0\right)^2\psi. \tag{25}$$

如果把形如 (23) 的场代入到 (25)，便得到 ψ_0 的方程

$$i\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right)=-\beta\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x^2}.$$

我们还没有考虑非线性. 照上所述，非线性归结于同 $|\psi_0|$ 有关的色散律. 在一阶近似下，可只考虑关系式 $\omega(k_0)$，并且修正量级只取到 $|\psi_0|^2$:

$$\omega(k_0)=\omega_0+\alpha|\psi|^2.$$

联立这些方程，我们得到

$$i\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial t}+u_0\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right)=-\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\alpha|\psi_0|^2\psi_0. \tag{26}$$

此方程右边包括色散和非线性修正. 如果忽略右边，该方程描述群速度为 $u_0=\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)_{k=k_0}$ 的波包传播.

令人感兴趣地是，在完全是另一类物理问题中也碰到方程(26)，它描述粒子间有弱相互作用的非理想玻色气体的行为．在这种问题中，所谓凝聚波函数满足方程(26)，因此这样的方程具有薛定谔方程的直接意义[17]．自然，在这种情形下所推出的方程不包含对快振荡的平均，而仅要求气体的稀薄程度．

下面我们来确定上面曾提到的朗谬(Langmuir)等离子体波中方程(26)的常数，在这种情况中，非线性是由等离子体位移时形成的电场产生的．

正如大家所知道的那样，当k不大时，朗谬波的色散律为

$$\omega = \omega_0 + 3/2(kD)^2 \tag{27}$$

$(kD \ll 1)$．

因此，在我们的情况下，$\omega(k_0) = \omega_0 = \sqrt{4\pi n_e e^2/m}$，$u_0 = 0$，$\beta = 3/2D^2$．

为了确定 α，必须求出等离子体在波场影响下密度的改变．作用于场中电子上的力等于

$$f = -\partial U_{\mathrm{Eff}}/\partial x,$$

式中

$$U_{\mathrm{Eff}} = \frac{e^2}{4m\omega^2}|\psi|^2.$$

电子在这种场中的分布为

$$n_e = Zn_0 \exp\left(-\frac{U_{\mathrm{Eff}} - e\varphi}{T}\right) \simeq Zn_0\left(1 - \frac{U_{\mathrm{Eff}} - e\varphi}{T}\right),$$

式中φ是由力f所引起的等离子体扰动而产生的静电场势能．一般可以略去交变场对离子的作用，因此离子分布为

$$n_i = n_0 e^{-Ze\varphi/T} \simeq n_0(1 - Ze\varphi/T).$$

现在考虑到，等离子体是准中性的：

$$n_e = Zn_i.$$

从这三个方程中消去 φ，容易得到

$$\delta n_e = -n_e \frac{Z}{Z+1} \frac{e^2}{4m\omega_0^2} |\phi|^2.$$

因为 $\delta\omega_0/\omega_0 \simeq 1/2\delta n_e/n_e$，所以最后我们求出

$$\alpha = -\frac{Z}{Z+1} \frac{e^2}{8m\omega_0^2}.$$

在这个例子中，我们没有讨论能否忽略等离子体加热效应这一重要问题．因为回答这一重要问题，要求知道大量具体的实验条件．

对下面的 sin-Gordon 方程加以说明是颇有益处的：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin u.$$

这种方程首先出现在 19 世纪几何问题中． 就是说，如果问题是曲率为负常数的曲面度规，当采用最方便的坐标变量时，那么这种曲面的度规向三维欧几里德空间的所谓“嵌入方程”（从度规和第二基本型之间的 Gauss-Peterson-Codazzi 关系式中得到的）便简化为 sin-Gordon 方程．经典几何曾经发现（用几何语言），这种方程存在所谓“Bäcklund 变换”——也即从较简单解构成更复杂解的一种代换． 现在已经知道，存在 Bäcklund 变换的系统，总是或几乎总是能用逆问题方法来积分，反之亦然．

众所周知，一些超导理论问题，以及无论在几何问题上还是在铁磁模型问题中，所利用的“n 场理论”——二维空间单位（三个分量）向量的手征（chiral）场，都归结为 sin-Gordon 方程．

第一章　逆散射问题方法

在经典形式中，逆散射问题方法对解非线性演化方程的哥西问题来说是十分方便的，甚至可以说，是相当合适的. 当在无穷远处下降充分快的函数类中求解哥西问题时，逆问题方法对解这种衰减快的情形来说，同积分常系数的线性偏微分方程的傅里叶方法相比，有相同的功效. 在后一情形中，傅里叶变换把偏微分方程变成线性常微分方程的无限集合；而且，如果方程的系数与坐标无关时，则这些傅里叶谐波的方程是独立的，因而对这些方程作积分是平凡的. 逆问题方法也存在类似情况. 不过在逆问题方法中，某个线性微分算子的系数函数映象到"散射数据"的集合，这种映象起傅里叶变换作用. 例如，对 Korteweg-de Vries (KdV) 方程作积分是借助于一维薛定谔算子

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2}+u(x)\psi=k^2\psi$$

的势能变换到在这种势能中的反射系数 $r(k)$ 来进行的；当势能随时间的变化满足 KdV 方程时反射系数对时间的依赖关系是平凡的：

$$r(k,t)=r(k,0)e^{-8ik^3t}.$$

因此，这使 KdV 方程的积分问题化成了按照已知的反射系数反求势能 $u(x)$ 的问题——量子散射理论的逆问题.

本章将研究的非线性方程都是能用转换到二阶线性方程的散射数据的方法来积分的. 在这类演化方程中最感兴趣的是 KdV 方程、非线性薛定谔方程和 sin-Gordon 方程. 除这些

方程之外，在§7中我们还将研究几个离散系统，即类似于KdV方程的有限差分方程和熟知的“Toda链”方程组．乍看起来，这些系统毫无关系，但它们的解的定性结构在颇大程度上是相同的，所对应的谱问题也存在许多共同点．这一切是同对这些系统的积分都借助于二阶方程（或者类似于二阶方程的离散系统）有关；也正是基于这种原因，才把这些系统都放在同一章．

我们论述逆散射问题方法，之所以先从KdV方程理论入手，一方面是遵循历史发展，另一方面（首先）也出自教学上的考虑，因为读者——物理学家从量子力学教科书上已经很熟习直线Sturm-Liouville算子谱理论的许多事实．

§1. 散射理论知识．量子散射理论的逆问题

我们在整个直线上 $-\infty<x<\infty$ 研究一维薛定谔算子（Sturm-Liouville 算子）$L=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x)$．认为实数势 $u(x)$ 足够光滑并且当 $|x|\to\infty$ 时变为零．

我们将在整个轴上处处有界的函数类 $\psi(x)$ 中研究下面本征值问题：

$$L\psi=-\frac{d^2\psi}{dx^2}+u(x)\psi=\lambda\psi.$$

除了平方可积的本征函数的分立谱之外，还存在不能归一化的本征函数的二重简并连续谱．连续谱充满半实轴 $\lambda\geqslant 0$；算子 L 的分立谱本征值是负的．从标准的量子力学教科书知道，分立谱本征值的数目可以无穷多——本征值可聚集在 $\lambda=0$ 的邻域内．$|x|\to\infty$ 时衰减慢的势，例如库仑势 $u(x)=-\alpha/x$ 或者势 $u(x)=\alpha/x^2$，便属于这种情况．对 $u(x)$ 加上以下限制之后，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|(1+|x|)dx<\infty. \tag{1}$$

我们就去掉了束缚态数目是无穷多的势.

现在着手研究散射问题. 同时为了方便，将用动量 k 代替能量 $\lambda(\lambda=k^2)$. 我们把本征函数方程写成下面形式:

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2}+u(x)\psi=k^2\psi. \tag{2}$$

现在实数 k 对应连续谱，而虚轴上的点 $k=i\kappa_n$, $n=1$, $2,\cdots,N$, $\kappa_n>0$ 对应分立谱.

对每个实数 $k\neq 0$，方程 (2) 解的集合构成一个二维线性空间 G_k. 在 G_k 中我们规定两组基底. 其中第一组基底由方程 (2) 的两个解 $\psi_{1,2}(x,k)$ 所组成，它们是用下面的渐近条件 ($x\to+\infty$ 时)来确定的:

$$\psi_1(x,k)=e^{-ikx}+o(1),$$
$$\psi_2(x,k)=e^{ikx}+o(1),\qquad x\to+\infty;$$

第二组基底 $\varphi_{1,2}(x,k)$ 用类似的条件 ($x\to-\infty$ 时)给出:

$$\varphi_1(x,k)=e^{-ikx}+o(1),$$
$$\varphi_2(x,k)=e^{ikx}+o(1),\qquad x\to-\infty.$$

由于势的实数性我们有

$$\varphi_1(x,k)=\bar{\varphi}_2(x,k),\quad \psi_1(x,k)=\bar{\psi}_2(x,k). \tag{3}$$

此外，显然有

$$\varphi_1(x,k)=\varphi_2(x,-k),\quad \psi_1(x,k)=\psi_2(x,-k). \tag{4}$$

两组基底中的任何一个向量是另外一组基底的向量的线性组合:

$$\varphi_i(x,k)=\sum_{l=1,2}T_{il}(k)\psi_l(x,k),\ i=1,2.$$

我们将称上面所定义的矩阵 $T(k)$ 为跃迁矩阵，根据 (3) 式，T 可表示为

$$T(k)=\begin{pmatrix}a(k) & b(k)\\ \bar{b}(k) & \bar{a}(k)\end{pmatrix}.$$

今后我们将略去函数 φ_1 和 ϕ_1 的角标 1．因此，

$$\varphi(x,k)=a(k)\phi(x,k)+b(k)\bar{\phi}(x,k). \tag{5}$$

方程 (2) 的任何一对解 f_1，f_2 的朗斯基行列式

$$W(f_1,f_2)=f_1\frac{df_2}{dx}-f_2\frac{df_1}{dx}$$

与 x 无关．显然，

$$W(\varphi,\bar{\varphi})=W(\phi,\bar{\phi})=2ik.$$

此关系式同公式 (5) 一起得到，

$$|a(k)|^2-|b(k)|^2=1, \tag{6}$$

即跃迁矩阵是幺模的：$\det T(k)=1$.

容易看到，量 $a^{-1}(k)$ 与 $b(k)a^{-1}(k)$ 分别是波从右边入射到势 $u(x)$ 的穿透系数和反射系数．事实上，当 $x\to+\infty$ 时，本征函数 $\varphi(x,k)a^{-1}(k)$ 的渐近式是

$$\frac{\varphi(x,k)}{a(k)}=e^{-ikx}+\frac{b(k)}{a(k)}e^{ikx}+o(1),$$

即，是入射波 (e^{-ikx}) 和反射波 $(ba^{-1}e^{ikx})$ 的叠加．在直线 x 的另一端

$$\frac{\varphi(x,k)}{a(k)}=\frac{e^{-ikx}}{a(k)}+o(1),$$

即存在穿透过来的波． 换句话说，$t(k)=a^{-1}(k)$ 是向前散射振幅而 $r(k)=b(k)a^{-1}(k)$ 是向后散射振幅．同时从 (6) 得到，散射是幺正的：

$$|t(k)|^2+|r(k)|^2=1.$$

在量子力学教科书中详细地研究了向前散射振幅的解析性质．已知，在黎曼曲面物理叶 $\sqrt{\lambda}$ ($\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}>0$) 上，除分立谱上的点 $\lambda=\lambda_n$ (振幅在这些点有简单极点)外，$t(\lambda)$ 是能

量λ的解析函数．此外，向前散射振幅在物理叶不等于零．这一切显然表明，$a(k)$ 在 k 平面的上半面是解析的，而在 $k_n = i\kappa_n$，$\kappa_n^2 = -\lambda_n$ 这些点上有简单零点．同样明显地看出，当 $|k| \to \infty$，$\mathrm{Im}k \geqslant 0$ 时，$a(k) \to 1$．由于跃迁矩阵对角元这些解析性质的重要性和一定的普适性（对于另外一些微分算子的散射理论也有类似的结论），下面我们证明这些事实．

我们可由跃迁矩阵 $T(k)$ 得到关于薛定谔算子连续谱的详细的知识．事实上，$T(k)$ 的全部资料就包含在反射系数中

$$r(k) = b(k)/a(k).$$

[因根据 (3)、(4)、$r(-k) = \bar{r}(k)$，故只要在 $k > 0$ 半轴上给出该系数就可以了.]实际上，从 (6) 我们求出

$$|a(k)|^2 = (1 - |r(k)|^2)^{-1},$$

即 $r(k)$ 的模单值地确定 $|a(k)|$．又知道解析函数 $a(k)$ 在上半平面的零点，因此，我们可以按 $a(k)$ 的模单值地确定出它的幅角．为此，我们研究函数 $a_1(k)$

$$a_1(k) = a(k) \prod_{n=1}^{N} \frac{k + i\kappa_n}{k - i\kappa_n}. \tag{7}$$

照前面所述，当 $\mathrm{Im}k > 0$ 时，此函数仍是解析的，同时在这里不再有零点．因此，$\ln a_1(k)$ 在上半平面是解析的，且当 $|k| \to \infty$ 时它等于零．同时在实轴上 $|a_1(k)| = |a(k)|$．由函数 $\ln a_1(k) = \ln|a_1(k)| + i\arg a_1(k)$ 的色散关系给出 $\arg a_1(k)$

$$\arg a_1(k) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|a(k')|dk'}{k' - k}.$$

因此

$$\arg a(k) = \frac{1}{i}\sum_{n=1}^{N} \ln\frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|a(k')|}{k' - k}\,dk'. \tag{8}$$

以后，这个简单公式是非常有用的。

于是，按反射系数的模求出 $a(k)$. 而函数 $b(k)$ 简单地等于 $r(k)a(k)$.

下面我们写出同散射特点自然衔接起来的薛定谔算子分立谱的相应特征。

对应本征值 $\lambda_n = -\kappa_n^2$ 的本征函数满足方程

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + u(x)\psi = -\kappa_n^2\psi.$$

众所周知，薛定谔算子的分立谱是简单的，这样，此方程的任何一个解乘以常数可得到其全部解. 本征函数在无限远处渐近行为是

$$\psi \to C_\pm e^{\mp\kappa_n x}, \quad x \to \pm\infty.$$

我们规定本征函数 $\varphi^{(n)}(x)$ 在 x 为 $-\infty$ 处，它的渐近行为是

$$\varphi^{(n)}(x) = e^{\kappa_n x} + o(e^{\kappa_n x}). \tag{9}$$

这时，当 $x \to +\infty$ 时，函数

$$\varphi^{(n)}(x) = b_n e^{-\kappa_n x} + o(e^{-\kappa_n x}),$$

显然是实的，因此量 b_n 也是实的. 我们通常按 λ_n 递增次序(即按 κ_n 递减次序)对本征值 λ_n 进行编序

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N < 0.$$

这时，λ_1 是基态能量，而 $\varphi^{(1)}$ 是基态波函数；$\varphi^{(1)}$ 没有零点，而 $\varphi^{(n)}$ 刚好 $n-1$ 次经过零点. 因此

$$b_n = |b_n|(-1)^{n-1}. \tag{10}$$

对本征值来说，正的量 $|b_n|$ 乃是分立谱的附加特征. 这些特征同系数 $r(k)$，本征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ 一起完全确定了问题(2)的谱. 集合 $s = (r(k), \kappa_n, |b_n|, n = 1, \cdots, N)$ 叫做散射数据. 从势 $u(x)$ 到散射数据的映象 $u(x) \to s$ 是单值可逆的. 按 s 反求 $u(x)$ 的问题乃是逆散射理论的课题.

在研究逆问题时，上面引入的薛定谔方程特解的解析性

质起着根本作用．即，对任何 x，在 k 的上半平面，函数 $\varphi(x, k)\exp(ikx)$ 是解析的，且有渐近形式

$$\varphi(x, k)\exp(ikx) = 1 + o(1/k), \quad |k| \to \infty, \mathrm{Im}k > 0,$$

而解 $\psi(x, k)$ 在 k 的下半平面解析并有渐近形式，

$$\psi(x, k)\exp(ikx) = 1 + o(1/k), \quad |k| \to \infty, \mathrm{Im}k < 0.$$

为了证实这点，利用算子 $d^2/dx^2 + k^2$ 的格林函数 $G(x, x', k)$，将方程 (2) 化为 $\varphi(x, k)$ 的等效积分方程

$$\varphi(x, k) = e^{-ikx} - \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', k)u(x')\varphi(x', k)dx'.$$

注意到 $\varphi(x, k)$ 在 x 为 $-\infty$ 处的渐近形式，则求出我们所需要的格林函数

$$G(x, x', k) = \begin{cases} -\dfrac{\sin k(x - x')}{k}, & x > x', \\ 0, & x < x'. \end{cases}$$

因此，$\chi_+(x, k) = \varphi(x, k)e^{ikx}$ 满足方程

$$\chi_+(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x')\chi_+(x', k)dx'. \quad (11)$$

在 k 的上半平面，方程 (11) 核的指数始终保持有界(不但如此，还始终保持衰减)．积分沿 $x' < x$ 区域进行．由于这个原因，$\chi_+(x, k)$ 允许解析延拓到 $\mathrm{Im}k > 0$ 区域．完全类似地，写出函数 $\chi_-(x, k) = \psi(x, k)e^{-ikx}$ 的方程：

$$\chi_-(x, k) = 1 - \int_{x}^{\infty} \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x')\chi_-(x', k)dx',$$

从而看到，$\chi_-(x, k)$ 解析延拓到 k 的下半平面；当 $|k| \to \infty$ 时，则有

$$\chi_-(x, k) = 1 + \frac{1}{2ik}\int_{x}^{\infty} u(x')dx' + o\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (12)$$

最后我们指出，直接从 $\psi(x, k)$ 在 k 的下半平面的解析性可得到函数 $\bar{\psi}(x, \bar{k})$ 在上半面的解析性．

函数 $a(k)$ 可用上半平面的解析函数 $\varphi(x, k)$, $\bar{\psi}(x, k)$ 表示出来.

计算朗斯基行列式 $W(\varphi, \bar{\psi})$, $W(\psi, \varphi)$, 并利用 (5), 求出

$$a(k) = (2ik)^{-1}[\bar{\psi}_x(x, k)\varphi(x, k) - \bar{\psi}(x, k)\varphi_x(x, k)],$$
$$b(k) = (2ik)^{-1}[\varphi_x(x, k)\psi(x, k) - \varphi(x, k)\psi_x(x, k)]. \tag{13}$$

从其中第一个公式得到,在 k 的上半平面 $a(k)$ 是解析的, 且有渐近值:

$$a(k) = 1 + o(1/k), \quad |k| \to \infty, \quad \mathrm{Im}k \geqslant 0.$$

在上半平面, $a(k)$ 等于零的那些点, 相应于算子 L 的分立谱. 实际上,函数 $\varphi(x, k_0)$, $\bar{\psi}(x, k_0)$ 的朗斯基行列式等于零 $(a(k_0) = 0)$ 就表明它们是线性相关的:

$$\varphi(x, k_0) = c\bar{\psi}(x, k_0).$$

从这个关系式中得到, $\varphi(x, k_0)$ 成指数衰减这一结论对下面两种情况都是成立的: $x \to -\infty$ (由 φ 的定义直接得出这一结论)及 $x \to +\infty$ (因 $\bar{\psi}(x, k) = e^{ikx}$, $x \to +\infty$). 因此, $\varphi(x, k_0)$ 是算子 L 分立谱的本征函数, 而 k_0^2 为 L 的本征值. 从 L 的自共轭性得出, k_0^2 是实的,即 $a(k)$ 的所有零点都分布在虚轴上. 其次,设 $\lambda_n = -\kappa_n^2$ 为 L 的本征值. 当 $x \to -\infty$ 时, 函数 $\varphi(x, i\kappa_n)$ 的渐近形式同上面所确定的本征函数 $\varphi^n(x)$ 的渐近形式相同,故 $\varphi^n(x) = \varphi(x, i\kappa_n)$. 在 $x \to +\infty$ 处,

$$\varphi^n(x) = b_n e^{-\kappa_n x} + o(e^{-\kappa_n x}), \text{ 即}^{1)}$$
$$\varphi(x, i\kappa_n) = b_n\bar{\psi}(x, i\kappa_n) = b_n\psi(x, -i\kappa_n). \tag{14}$$

因此, $a(i\kappa_n) = 0$ 并且 $a(k)$ 在 k 上半平面的零点分布与 L

---

1) 在虚轴上函数 $\varphi(x, k)$ 和 $\psi(x, k)$ 显然都是实的.

的本征值一一对应。

$a(k)$ 的零点是简单的。 为了证实这点，我们对方程 $L\varphi(x, k) = k^2\varphi(x, k)$ 在 $k = i\kappa_n$ 处按 k 进行微商：

$$(L + \kappa_n^2)\varphi'(x, i\kappa_n) = 2i\kappa_n\varphi(x, i\kappa_n).$$

用 $\varphi(x, i\kappa_n)$ 乘此关系式，并把所得等式对整个 x 积分。在下面的积分中两次调换微分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x, i\kappa_n)(L + \kappa_n^2)\varphi'(x, i\kappa_n)dx$$

并顾及到，当 x 在 $+\infty$ 处，$\varphi'(x, i\kappa_n)$ 的渐近式的主项为 $a'(i\kappa_n)e^{\kappa_n x}$（因 $a(i\kappa_n) = 0$），我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(x, i\kappa_n)dx = ia'(i\kappa_n)b_n \tag{15}$$

即 $a'(i\kappa_n) \neq 0$. 从这个公式同样得到，$ia'(i\kappa_n)$ 值是实的，且同 b_n 的符号相同。

同 (15) 一起，我们还要指出，连续谱本征函数的内积公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\bar{\varphi}(x, k)\varphi(x, k')dx$$
$$= 2\pi|a(k)|^2\delta(k - k') + 2\pi\bar{a}(k)\bar{b}(k)\delta(k + k').$$

现在我们就准备着手推出逆散射问题方程。

用 $e^{ikx}a^{-1}(k)$ 乘公式 (5)，并记住函数 $\chi_\pm(x, k)$ 的定义，我们写出

$$\frac{\chi_+(x,k)}{a(k)} = \chi_-(x,k) + r(k)\bar{\chi}_-(x,k)e^{2ikx}. \tag{16}$$

在 k 轴上半面，(16) 式的左边除虚轴上的点 $k = i\kappa_n$，$n = 1, \cdots, N$（在这些点上，$\chi_+(x, k)a^{-1}(k)$ 有简单极点）之外，都是解析的。当 $\mathrm{Im}k \leqslant 0$ 时，函数 $\chi_-(x, k)$ 是解析的。我们研究函数：

$$\Phi(x, k) = \begin{cases} \chi_+(x, k)a^{-1}(k) & \mathrm{Im}k > 0 \\ \chi_-(x, k), & \mathrm{Im}k < 0; \end{cases} \tag{17}$$

函数 $\Phi(x, k)$ 在上半平面有简单极点，在实轴上有跳跃．从(16)看出，此跳跃等于 $r(k)\bar{\chi}_-(x, k)e^{2ikx}$．在复平面其余各点函数 $\Phi(x, k)$ 是解析的，且当 $|k| \to \infty$ 时，极限值为1．显然，函数可表示为下面形式：

$$\Phi(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\Gamma_n(x)}{k - i\kappa_n}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k')\bar{\chi}_-(x, k')e^{2ik'x}dk'}{k' - k} \ (\mathrm{Im}k \neq 0) \tag{18}$$

式中 $\Gamma_n(x)$ 表示函数 $\Phi(x, k)$ 在点 $k = i\kappa_n$ 处的留数．表达式(18)乃是柯西公式

$$\Phi(x, k) - 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\Phi(x, k') - 1}{k' - k} dk',$$

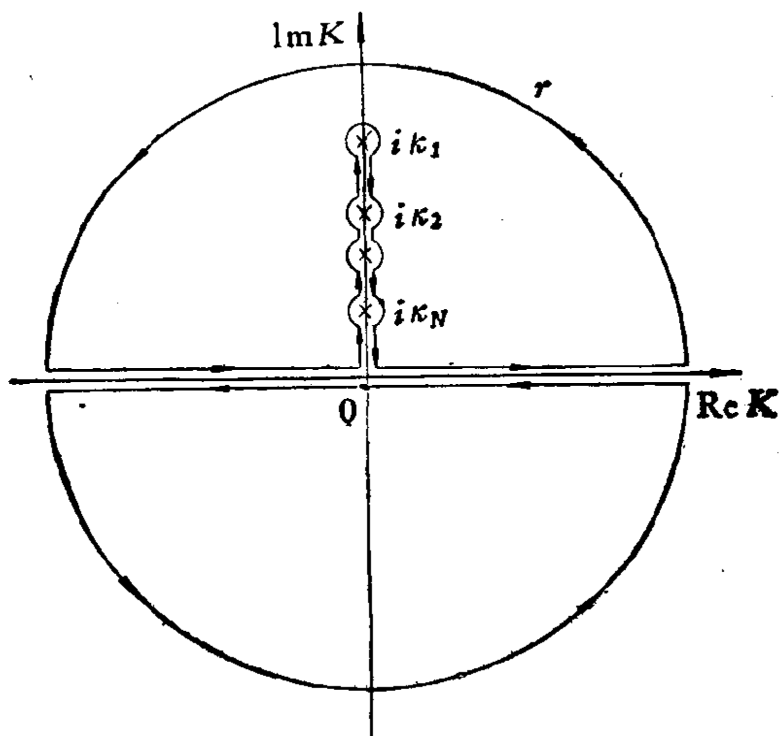


图 1．积分迴路 Γ．

的直接结果。此公式所选取的积分迴路 r 如图 1 所示。

$\Gamma_n(x)$ 的值可以同 $\Phi(x, k)$在下半轴点 $k=-i\kappa_n$ 上的值联系起来(即同 $\overline{\chi}_-(x, -i\kappa_n)$联系起来). 其实,利用(14)看出

$$\Gamma_n = \frac{\varphi(x, i\kappa_n)e^{-\kappa_n x}}{a'(i\kappa_n)} = \frac{b_n\phi(x, -i\kappa_n)e^{-\kappa_n x}}{a'(i\kappa_n)}$$

$$= \frac{b_n}{a'(i\kappa_n)}\chi_-(x - i\kappa_n)e^{-2\kappa_n x}$$

利用 (18) 求出 $\chi_-(x, -i\kappa_n)$, 我们得到

$$\Gamma_n(x) = \frac{b_n e^{-2\kappa_n x}}{a'(i\kappa_n)}\left\{1 + i\sum_{m=1}^{N}\frac{\Gamma_m(x)}{\kappa_n + \kappa_m}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(k')\overline{\chi}_-(x, k')e^{2ik'x}dk'}{k' + i\kappa_n}\right\}. \qquad (19)$$

现在我们令公式 (18) 中的 k 从下半平面趋于实轴;因为按定义 (17), $\Phi(x, k - i0) = \chi_-(x, k)$, 那么

$$\chi_-(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^{N}\frac{\Gamma_n(x)}{k - i\kappa_n}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(k')\overline{\chi}_-(x, k')e^{2ik'x}dk'}{k' - k + i0}. \qquad (20)$$

形如 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(k')}{k' - k \pm i0}dk'$ 这类表达式,应理解为 $\mp\pi i f(k) + ⨍_{-\infty}^{\infty}\frac{f(k')}{k' - k}dk'$, 式中符号 $⨍$ 表示主值积分. 关系式 (19), (20) 是函数 $\chi_-(x, k)$ 和集合 $\Gamma_n(x)$, $n = 1, \cdots, N$, (即算子 L 的本征函数)的线性封闭方程组. 这是逆问题方程的一种写法. 势 $u(x)$ 只须用方程组 (19), (20) 的解表示出来. 最简单地作法是,把从公式 (20) 得到的 $\chi_-(x, k)$ 按 $1/k$ 幂的渐近展式同公式 (12) 比较得到

$$u(x) = -\frac{d}{dx}\left(2i\sum_{n=1}^{N}\Gamma_n(x)\right.$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(k)\bar{\chi}_-(x, k)e^{2ikx}dk\Big). \tag{21}$$

方程 (19), (20) 是单值可解的. 本征值 χ_n 可以是任意正数 $\kappa_1 > \kappa_2 \cdots > \kappa_n > 0$, 量 $C_n = (-1)^{n-1}b_n$, $n = 1, \cdots, N$, 同样仅要求是正的. 系数 $r(k)$ 可以是满足以下条件的任意复函数:

1. $r(-k) = \bar{r}(k)$;
2. $|r(k)| < 1$, $k \neq 0$;
3. $r(k) = o\left(\frac{1}{k}\right)$, $|k| \to \infty$;
4. 按 $r(k)$ 所构造出的系数 $b(k)$, 它的傅里叶变换,

$$B(x) = \int_{-\infty}^{\infty} b(k)e^{ikx}dk$$

应满足条件

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1 + |x|)\left|\frac{dB}{dx}\right|dx < \infty$$

特别可以研究对所有 k 来说 $r(k) = 0$ 的势. 这种势称之为无反射势,它完全由分立谱的特征所确定.

我们已经把逆问题方程写成了奇异积分方程组的形式. 对薛定谔算子(Sturm-Liouville 算子). 来说,更熟悉的逆问题方程形式是所谓 Гельфанд-Левитан-Марченко 方程. 为了得到这种方程, 我们指出, 在 k 轴的下半平面为解析的函数 $\chi_-(x, k)$, 它的傅里叶变换被截断,即 χ_- 总可以表示为

$$\chi_-(x, k) = 1 + \int_0^{\infty} A(x, y)e^{-iky}dy.$$

这对 $\psi(x, k)$ 来说,意味着存在这样的数函 $k(x, y)$, 使得

$$\psi(x, k) = e^{-ikx} + \int_x^{\infty} k(x, y)e^{-iky}dy. \tag{22}$$

显然, $k(x, y) = A(x, y - x)$. 从公式 (22) 得到,存在一个

线性算子，它把势为零的薛定谔方程的解 (e^{-ikx}) 变换到势为 $u(x)$ 的薛定谔方程的解. 函数$k(x, y)$ 称为变换算子的核. 因为 $\psi(x, -k) = \bar{\psi}(x, k)$，$\mathrm{Im}k = 0$，所以 $k(x, y)$ 为实的.

用 $e^{iky}/a(k)$ 乘等式 (5)，并对所有实数 k 积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\varphi(x, k)e^{iky}}{a(k)} - e^{-ik(x-y)}\right)dk$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}dk e^{iky}[\psi(x, k) - e^{-ikx} + r(k)\bar{\psi}(x, k)]. \quad (23)$$

计算此公式左边的积分. 被积函数在上半平面仅存在有限数目简单极点，并且当 $|k| \to \infty$ 时被积函数衰减，因此该积分可表示为

$$2\pi i \sum_{n=1}^{N} \frac{\varphi(x, i\kappa_n)e^{-\kappa_n y}}{a'(i\kappa_n)}.$$

利用 (14) 和 $k = i\kappa_n$，$n = 1, \cdots, N$ 时的表达式 (22)，便得到这个积分的表达式

$$2\pi i \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n e^{-\kappa_n(x+y)}}{a'(i\kappa_n)}$$
$$+ 2\pi i \int_x^{\infty} K(x, z) \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n e^{-\kappa_n(z+y)}}{a'(i\kappa_n)} dz.$$

其次，把 (22) 代入到等式 (23) 的右边，并引入

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n e^{-\kappa_n x}}{ia'(i\kappa_n)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(k)e^{ikx}dk. \quad (24)$$

最后求得

$$K(x,y) + F(x + y) + \int_x^{\infty} K(x,z)F(z + y)dz = 0 \quad (25)$$

这就得 Гельфанд-Левитан-Марченко 方程.

从 (22) 得到 $\chi_-(x, k)$ 的渐近展式

$$\chi_-(x,k) = 1 + \frac{1}{ik}K(x,x) + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad |k| \to \infty.$$

此式同(12)比较,得到用变换算子的核来表示势 $u(x)$

$$u(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x). \tag{26}$$

§ 2. 用逆散射问题方法积分 KdV 方程的图象

逆散射问题方法的发现是同 Gardner, Greene, Kruskal 和 Miura (GGKM) 的出色观察分不开的.

我们研究势 $u(x)$ 在无穷远处衰减的薛定谔方程

$$-\frac{d^2f}{dx^2} + u(x,t)f = k^2f. \tag{1}$$

为了明确起见,例如将 f 理解为由渐近式 $f(x,k)=e^{-ikx}+o(1)$, $x\to-\infty$ 给出的方程(1)的某一个特解,即 f 是 § 1 中所定义的解 $\varphi(x,k)$. 如果方程(1)的势依赖于辅助参数 t (时间),那么 $\varphi(x,k)$ 同样与 t 有关. 散射数据就变成了 t 的函数;于是当 $x\to+\infty$ 时 $\varphi(x,k)$ 的渐近式可看出是

$$\varphi(x,k) = a(k,t)e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx} + o(1). \tag{2}$$

显然,对 $u(x,t)$ 是 t 的任意函数的情况,求出散射数据对时间的依赖关系是不可能的. 但是,如果 $u(x,t)$ 随时间变化同 KdV 方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

的解一样,那么 $a(k,t)$, $b(k,t)$ 便服从 GGKM 方程

$$\dot{a}(k) = 0, \quad \dot{b}(k,t) = 8ik^3b(k,t), \tag{3}$$

而 $\varphi(x,k)$ 与 t 的关系由下面方程给出:

$$\dot{\varphi}(x,k) = -A\varphi(x,k) + 4ik^3\varphi(x,k), \tag{4}$$

式中 A 算子为

$$A = 4\frac{d^3}{dx^3} - 3\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right). \tag{5}$$

逆命题也是对的：如果散射数据随时间的变化满足 GGKM 方程，那么势 $u(x, t)$（单值地由散射数据确定）便满足 KdV 方程. 证明这一论断正确性的最简单方法是注意 KdV 方程恒等于下面的算子方程：

$$\dot{L} = [L, A], \tag{6}$$

其中 $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u$，$A$ 由 (5) 规定. 实际上，$\dot{L}$ 是乘以函数 u_t 的算子，而对易子 $[L, A]$（简单地计算指出）同样等于乘以 $6uu_x - u_{xxx}$ 的算子，因此 (6) 与 KdV 方程一致.

如同 (6) 这样的形式的演化方程的表象称之为 *lax* 表象. 因为算子 $L(t)$ 么正等价于 $L(0)$（由于 A 在 $L_2(R)$ 中的反对称性），所以算子 L 的本征值与时间的无关性便是此表象的一个平凡结果. 因此，L 的本征值实质是 KdV 的积分. 现在研究方程 (1) 并取它的时间导数：

$$\dot{L}f + L\dot{f} = k^2\dot{f} \qquad \left(\frac{dk^2}{dt} = 0\right).$$

利用 $\dot{L}$ 的表达式 (6) 求出：

$$(L - k^2)(\dot{f} + Af) = 0,$$

即 $\dot{f} + Af$ 是 L 的本征函数，其本征值同 f 的本征值相同. 我们用 $\tilde{f}$ 表示此函数：

$$\dot{f} + Af = \tilde{f}, \quad (L - k^2)\tilde{f} = 0 \tag{7}$$

上面我们曾规定 f 在 x 为 $-\infty$ 处，它的渐近式：$f = \varphi(x,k)$. 这就单值地定出解 $\tilde{f}$：当 $x \to -\infty$ 时 f 的渐近形式不依赖于时间 t，且有 e^{-ikx} 形式，这意味着，$\dot{f} + Af \xrightarrow[x\to-\infty]{} 4ik^3e^{-ikx}$，即

$$\tilde{f} = 4ik^3\varphi(x, k) + o(1), \quad x \to -\infty,$$

或者 $\dot{f}=4ik^3\varphi(x,k)$. 因此,方程 (7) 完全与 (4) 一致. 而 GGKM 方程也是散射数据定义 (2) 和 (4) 的立即作出的结果. 在 (4) 中令 $x\to+\infty$, 并假定 $u(x)=0$, 求得

$$\dot{a}e^{-ikx}+\dot{b}e^{ikx}=\left(-4\frac{d^3}{dx^3}+4ik^3\right)(ae^{-ikx}+be^{ikx}),$$

此式即方程 (3).

求分立谱中的散射数据 $\kappa_n(t)$, $b_n(t)$, $n=1,\cdots,N$ 随时间变化是如此地简单: 正如已经阐述的那样,由于 $L(t)$ 等价于 $L(0)$, 因此本征值 $\lambda_n=-\kappa_n^2$ 与时间无关. 直接从方程 $\dot{a}(k)=0$, 也能得到这一结果,因 $i\kappa_n$ 是解析函数 $a(k)$ 的零点,而 $a(k)$ 与时间无关,故 $\dot{\kappa}_n=0$. 从方程(4)能求出 $b_n(t)$ 对时间的依赖关系,因根据定义, b_n 是 $\varphi(x,i\kappa_n)$ 渐近展开式中的系数:

$$\varphi(x,i\kappa_n)=b_n(t)e^{-\kappa_n x}+o(e^{-\kappa_n x}),\quad x\to+\infty.$$

将此式代入到 $k=i\kappa_n$ 时的 (4) 式,求出

$$\dot{b}_n=8\kappa_n^3 b_n. \tag{8}$$

因此,散射数据随时间的演化便有下面形式:

$$s(t)=\{r(k,0)e^{8ik^3t},\ \kappa_n,\ b_n e^{8\kappa_n^3 t},\ n=1,\cdots,N\} \tag{9}$$

实际上,我们借助于(隐式的)变量代换 $u(x)\to s$ 对 KdV 方程作了积分. 在新变量中运动方程 $\dot{s}=F(s)$ 变成了平凡可积的常微分方程集合. 反演代换 $s(t)\to u(x,t)$ 给出 KdV 方程的解. 由此可见,求解 KdV 方程柯西问题的图象,直观上看是

$$u(x,0)\xrightarrow{\text{I}}s(0)\xrightarrow{\text{II}}s(t)\xrightarrow{\text{III}}u(x,t).$$

在此图象中的第一个阶段: 按初始条件 $u(x,t)|_{t=0}=u(x,0)$, 借助于求解势为 $u(x,0)$ 的薛定谔算子之本征函数方程,计算出散射数据 $s(0)$. 第二个阶段是对散射数据来解柯西问

题．这个问题是平凡的：它的通解由公式(9)给出．最后，在我们图象的最后一个阶段中，必须指出具有散射数据 $s(t)$ 的薛定谔算子所对应的势 $u(x, t)$，即解散射的逆问题一例如，求解方程(1.25)．

上图象的每一个阶段都是同研究线性问题相联系的．尽管散射的正、逆问题都缺少更普遍的解析解，但所采用的这一系列方法，却使我们能类似于解线性偏微分方程那样来研究 KdV 方程的解．首先，我们能提出非常有名的 KdV 方程精确解的集合．即在衰减快情形下(当 $|x| \to \infty$ 时 $u \to 0$) N 个孤子解和周期性问题中类似的这种解．其次，我们直接用初始数据，写出了柯西问题的通解 $u(x, t)$ 在 $t \to \infty$ 时的渐近形式之显示公式．我们所作的这一切，都可以在线性问题中办到．

§ 3. 无反射势和 N 个孤子解

存在一类极好的势，相对它来说，散射的正问题和逆问题都能精确求解．这就是无反射势．对这种势来说，反射系数 $r(k)$ 对所有 k 皆恒等于零．与这类势有关的 KdV 方程的精确解族称之为 N 个孤子解．这些解描述着孤子的碰撞过程．KdV 方程一个非常突出的特点乃是孤子碰撞过程中，没有非弹性效应，即孤子之间碰撞后产生同碰撞前相同的孤子．正是这个事实(这首先在电子计算机上借助数值试验确定的)使人们对这个方程兴趣倍增．

我们研究下面形式的散射数据 $s = \{r(k) = 0,\ \kappa_n,\ b_n,\ n = 1, \cdots, N\}$．因 $b(k) = 0$，所以 $|a(k)| = 1$，从而 $a(k)$ 单值地由它自己的零点确定

$$a(k) = \prod_{n=1}^{N} \frac{k - i\kappa_n}{k + i\kappa_n}.$$

鉴于这种原因，我们可以认为量 $\left.\frac{da}{dk}\right|_{k=i\kappa_n} = a'(i\kappa_n)$ 是已知的. 同时 $ia'(i\kappa_n)$ 是实的，且同满足条件 (1.10) 的 b_n 符号相同. (参看公式 (1.15)) 因此，Гельфанд-Левитан 方程的核 $F(x)$ (1.24) 便有下面形式:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{N} \beta_n e^{-\kappa_n x}, \quad \beta_n = \frac{b_n}{iq'(i\kappa_n)} > 0. \qquad (1)$$

方程 (1.25)

$$K(x, y) + F(x+y) + \int_x^{\infty} K(x,z)F(z+y)dz = 0$$

这时很容易解，因为此方程的核是退化的. $K(x, y)$ 必须寻求下面形式的解:

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{N} K_n(x) e^{-\kappa_n y}. \qquad (2)$$

积分后，便得到 $K_n(x)$ 的线性代数方程组

$$K_n(x) + \sum_{m=1}^{N} \frac{\beta_n}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x} K_m(x)$$
$$= -\beta_n e^{-\kappa_n x}, \ n = 1, 2, \cdots, N. \qquad (3)$$

用 $A_n(x)$ 表示 $N \times N$ 阶方阵，其矩阵元为

$$A_{mn} = \delta_{nm} + \frac{\beta_n}{\kappa_n + \kappa_m} e^{-(\kappa_n+\kappa_m)x}. \qquad (4)$$

根据线性代数的熟知公式，方程 (3) 的解为

$$K_n(x) = \frac{\det A^{(n)}(x)}{\det A(x)},$$

式中 $A^{(n)}$ 表示矩阵 A 中第 n 列元素用列 $-\beta_m e^{-\kappa_m x}$ 代替后所得到的矩阵:

$$A_{mn}^{(n)} = -\beta_m e^{-\kappa_n x}, \ m = 1, 2, \cdots, N.$$

因为势 $u(x)$ 由函数 $K(x,x)$ 确定，所以用公式 (2) 算出 $K(x, x)$:

$$K(x, x) = (\det A)^{-1} \sum_{n=1}^{N} \det A^{(n)}(x) e^{-\kappa_n x}.$$

我们注意到，回忆熟知的行列式微商法则，上式的分子乃是 $\det A$ 的微商，因此 $K(x, x) = \frac{d}{dx} \ln \det A(x)$. 注意到这点，就可把势 $u(x)$ 的表达式 (1.26) 写成紧凑的形式

$$u(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det A(x). \tag{5}$$

此公式完全地描述了无反射势的整个族. 由于在 KdV 动力学中，无反射势的性质不随时间变化(如果 $r(k, 0) = 0$，那么 $r(k, t) = r(k, 0)e^{8ik^3t} = 0$)，因此，方程 (5) 确定了 KdV 方程的精确解集合. 在矩阵 A 的定义 (4) 中用下面简单代换

$$\beta_n \to \beta_n \exp(8\kappa_n^3 t),$$

得到无反射势的时间动力学.

最简单的非平凡无反射势只存在一个唯一的分立能级 $-\kappa_n^2$，$A(x) = 1 + \frac{\beta e^{-2\kappa x + 8\kappa^3 t}}{2\kappa}$，因而解 $u(x, t)$ 为

$$u(x, t) = -\frac{2\kappa^2}{\mathrm{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - \varphi)}, \tag{6}$$

式中 φ 为

$$\varphi = \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{\beta}{2\kappa} = \frac{1}{2\kappa} \ln b. \tag{7}$$

解 (6) 便是 KdV 方程的孤子. 由此可见，单孤子就是无反射势，对这种势只存在一个束缚态. 这种态的能量为 $-\kappa^2$，它即确定孤子的振幅又确定其速度 $v: v = 4\kappa^2$. 量 φ 乃是 $t = 0$ 时孤子的中心坐标——以后为简便起见，我们给它起名为孤子的位相.

在一般情况下，解 (5) 依赖于 $2N$ 个参数 $\kappa_1, \cdots, \kappa_N$; $\beta_1(0), \cdots, \beta_N(0)$. 有了解的显示形式 (5)，就可以证明，它

描述带有速度 $v_n = 4\kappa_n^2$（及相应的振幅）的N个孤子碰撞过程，换言之，当 $t \to -\infty$ 时，解（5）渐近式乃是单孤子解（6）的叠加：

$$u(x, t) \to \sum_{n=1}^{N} u_n(x - v_n t), \quad t \to -\infty, \tag{8}$$

式中 $u_n(x, t)$ 是解（6）取 $\kappa = \kappa_n$ 时的情形. 不过，直接从公式（5）得出这一结论要涉及到冗长的计算. 因此，我们改用别的办法作：我们指出，属于 $t = 0$ 时刻的势（8）的散射数据（相应孤子的位相选作 $\varphi_n(7)$），同确定解（5）的集合 (κ_i, b_i) 相同. 这是因为势能同它的散射数据之间，相互单值的对应关系是充分的. 固定某个模很大的负 $T: T < 0, |T| \gg 1$，并考虑作为薛定谔算子的势是按公式（8）所构成的函数 $u(x, T)$. 如果T的模足够大，那么不管组成 $u(x, T)$ 的各个孤子位相 φ_n 怎样选取，这种势也是一系列孤子势井. 第 n 个势井的坐标为 $x_n = v_n T + \varphi_n$，因此，相邻势井之间的距离 $x_n - x_{n-1} \sim (v_n - v_{n-1})T$ 比它们的大小 $\sim\kappa^{-1}$ 大得多. 显然，这种势（准确到以 $|T|$ 成指数小的项）是无反射势：$|r(k)| = 0(e^{-\lambda|T|})$（对所有 k）. 所以，我们有理由不去考虑薛定谔算子的连续谱. 让我们研究解 $\varphi(x, i\kappa_n)$ 的行为. 当 $x \to -\infty$ 时，它的渐近式是 $e^{\kappa x}$. 假如我们仅存在一个唯一的坐标为 x_0 的孤子（散射数据为 κ_0, b_0），那么"穿过"孤子，即在 $x \gg x_0$ 区域，$\varphi(x, i\kappa)$ 的渐近式为 $a(\kappa, \kappa_0)e^{\kappa x}$，其中 $a(\kappa, \kappa_0) = (\kappa - \kappa_0)/\kappa + \kappa_0$，即除 $\kappa = \kappa_0$ 情形外，都随 x 成指数的增长；而对 $\kappa = \kappa_0$ 的情形，指数增长变成指数衰减，且当 $x \to \infty$ 时，$\varphi(x, i\kappa_0) = b_0 e^{-\kappa_0 x}$.

现在回到势能 $u(x, T)$ 中来，并把 x 轴分成以下区域：

$$\xi_1 = (-\infty, x_1), \quad \xi_2 = (x_1, x_2), \cdots$$
$$\xi_N = (x_{N-1}, x_N), \quad \xi_{N+1} = (x_N, \infty).$$

函数 $\varphi(x, i\kappa)$ 在 ξ_1 区域中形式为 $e^{\kappa x}$. 穿过第一个孤子,即进入第二区域 ξ_2, $\varphi(x, i\kappa)$ 形式不变, φ 只获得因子 $a(\kappa, \kappa_1)$ (如果 $\kappa \neq \kappa_1$); 即 $\varphi(x, i\kappa) = a(\kappa, \kappa_1)e^{\kappa x}$. 现在呈现在我们面前的第二个孤子,问题雷同,即进入第三区域,当 $\kappa \neq \kappa_1, \kappa_2$ 时, $\varphi(x, i\kappa)$ 为 $a(\kappa, \kappa_1) \cdot a(\kappa, \kappa_2)e^{\kappa x}$. 依此类推,直到最后,如果 κ 不等于 κ_i 中的任何一个时,那么当 $x \to +\infty$ 时(即在 ξ_{N+1} 区) $\varphi(x, i\kappa)$ 的渐近形式为

$$\varphi(x, i\kappa) = \prod_{n=1}^{N} a(\kappa, \kappa_n)e^{\kappa x}.$$

由此可见,在势 $u(x, T)$ 中不可能存在与 $-\kappa_n^2$ 能量不同的束缚态(仍然准确到 $|T|$ 指数).

现在设 $\kappa = \kappa_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$. 同上面作法相同,在 ξ_k 区域中,求出函数 $\varphi(x, i\kappa_k)$ 的形式为

$$\varphi(x, i\kappa_k) = \prod_{n=1}^{k-1} a(\kappa_k, \kappa_n)e^{\kappa_k x}.$$

不过,对第 k 个孤子来说, $e^{\kappa_k x}$ 乃是它左边的本征函数的渐近形式,因此在 ξ_{k+1} 区域的指数增长变成衰减

$$\varphi(x, i\kappa_k) = b^{(k)}(T) \prod_{n=1}^{k-1} a(\kappa_k, \kappa_n)e^{-\kappa_k x}, \quad x \in \xi_{k+1}, \tag{9}$$

式中 $b^{(k)}(T)$ 用下面公式同第 k 个孤子坐标联系起来:

$$x_k = \frac{1}{2\kappa_k} \ln b^{(k)}(T) = 4\kappa_k^2 T + \varphi_k \tag{10}$$

(参看 (6), (7)). 解 (9) 还不能超出第 $(k-1)$ 个孤子的范围,因为超过这个范围,问题就含糊不清了;为此,我们代之而研究当 $x \to +\infty$ 时渐近式为 $e^{-\kappa_k x}$ 的解(即 $\psi(x, -i\kappa_k)$)的行为. 我们可注意到,正象函数 $\varphi(x, i\kappa)$ 那样,当从右向左穿过第 n 个孤子时,函数 $\psi(x, -i\kappa)$ 只不过获得因子 $a(\kappa, \kappa_n)$. 因此,在 ξ_{k+1} 区

$$\psi(x, -i\kappa_k) = \prod_{n=k+1}^{N} a(\kappa_k, \kappa_n) e^{-\kappa_k x}. \tag{11}$$

比较 (11) 和 (9)，我们求出

$$\varphi(x, i\kappa_k) = b^{(k)}(T) \prod_{n=1}^{k-1} a(\kappa_k, \kappa_n) \times \prod_{n=k+1}^{N} a^{-1}(\kappa_k, \kappa_n) \psi(x, -i\kappa_k). \tag{12}$$

这样 $-\kappa_n^2$，$k = 1, 2, \cdots, N$，便是势能为 $u(x, T)$ 的薛定谔算子的本征值．现在研究函数 $u(x, T)$，当 $T \to -\infty$ 时，将它作为 KdV 方程的初始条件，即研究速度为 $v_n = 4\kappa_n^2$、位相为 φ_n，$n = 1, \cdots, N$ 的孤子碰撞问题．我们上面已经算出了这种初始条件的散射数据：$r(k) = 0$，本征值 $-\kappa_n^2$，而相应的归一化因子 $\varphi(x, i\kappa_n) \cdot \psi^{-1}(x, -i\kappa_n)$ 由公式 (12)、(10) 给出．这些散射数据属于 $t = T$ 时刻，现在我们认为它们属于 $t = 0$ 时刻．这样我们就得指出，解族 (4)、(5) 中究竟哪一族恰好相应于 $t \to -\infty$ 时刻中的已知诸诸孤子的碰撞问题．显然，只须算出 $b_k(0)$

$$b_k(0) = e^{2\kappa_k \varphi_k} \prod_{n=1}^{k-1} \frac{\kappa_k - \kappa_n}{\kappa_k + \kappa_n} \prod_{n=k+1}^{N} \frac{\kappa_k + \kappa_n}{\kappa_k - \kappa_n}. \tag{13}$$

此公式给出 φ_k 与 $b_k(0)$ 之间相互单值的对应关系，这里 $b_k(0)$ 满足条件 (1.10)：$(-1)^{n-1} b_n > 0$．

于是，解 (5) 中的任何一个解都描述 N 个孤子的碰撞．这些解称为 N 个孤子解．试问，碰撞结果怎样？也即当 $t \to +\infty$ 时，N 个孤子解的渐近形式如何？

十分明显，由于碰撞的结果，我们重新得到了同碰撞前诸孤子之速度(及振幅)相同的孤子集合．这是从速度等于 $v_n = 4\kappa_n^2$ 及 KdV 方程相对变换 $t \to -t$、$x \to -x$ 不变性得出的．这样，可以改变的仅仅是孤子的位相 φ_n．求这种变化的最简

单方法是利用上面所指出的不变性和公式 (13). 当作 $x \to -x$ 变换时,孤子在 x 轴改变了排列次序;因此,为使 $t \to +\infty$ 时所构成的孤子位相 φ_k^+ 同 $b_k(0)$ 联系起来,只须调换 (13) 中符号 Π 的位置就可以了:

$$b_k(0) = e^{2\kappa_k \varphi_k^+} \prod_{n=k+1}^{N} \frac{\kappa_k - \kappa_n}{\kappa_k + \kappa_n} \prod_{n=1}^{k-1} \frac{\kappa_k + \kappa_n}{\kappa_k - \kappa_n}. \qquad (14)$$

当 $t = -\infty$ 时,孤子的位相加上"负"的记号. 公式 (13)、(14) 给出:

$$\varphi_k^+ - \varphi_k^- = \frac{1}{2\kappa_k} \sum_{n=k+1}^{N} \ln\left(\frac{\kappa_k + \kappa_n}{\kappa_k - \kappa_n}\right)^2 - \frac{1}{2\kappa_k} \sum_{n=1}^{k-1} \ln\left(\frac{\kappa_k + \kappa_n}{\kappa_k - \kappa_n}\right)^2. \qquad (15)$$

(我们提醒一下,孤子是按其速度递减次序编号的,因此,最快的孤子第一号,最慢的第 N 号.)

我们仔细研究一下两个孤子的碰撞. 在这种情形中,

$$\varphi_1^+ - \varphi_1^- = \frac{1}{\kappa_1} \ln\left|\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}\right|,$$

$$\varphi_2^+ - \varphi_2^- = \frac{-1}{\kappa_2} \ln\left|\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2}\right|,$$

即快孤子由于碰撞所得到的附加相移(量值为 $\Delta\varphi_1 = \varphi_1^+ - \varphi_1^-$)是向前的,而慢孤子是向后的. 速度相近的孤子相互作用最强. 如果 $\Delta\kappa = \kappa_1 - \kappa_2 \ll \kappa$, 那么

$$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{2\kappa}{\Delta\kappa}, \qquad (16)$$

从而当 $\Delta\kappa \to 0$ 时,无限增长. 当 $\Delta\kappa/\kappa \ll 1$ 时,孤子的相移同能级间的距离成对数关系,这是不难理解的. 从分析两个孤子解的显示形式 (5) (尽管此公式臃肿,但毕竟一目了然)可以看出,当孤子速度差很小时,解的定性结果是这样的:

在任何时刻，解 $u(x, t)$ 都清晰地显示出两个极小值，同时极小值间的距离比它们的特征尺度大得多. 当负 t 的模足够大时，两个极小值都以恒定的速度运动着，并且快孤子趋近慢孤子. 快孤子极小值振幅随其接近程度而减少，而慢的增加. 相应地第一个速度减少而第二个增加. 当极小值最接近的时刻，两个孤子的振幅相同. 事件进一步发展的方向是：最初极小值较小的振幅继续单调增加，渐近地趋于快孤子的初始振幅，而快孤子变成慢的，两个孤子交换了速度和振幅之后，又分开了. 同时，很明显，快孤子位移量级等于这两个孤子接近的最小距离. 这个距离是很容易估计的. 在最接近时刻，势 $u(x, t)$ 的极小值振幅是同样的. 假如没有第二个极小值，在第一个极小值位井中就有一个能量为 $-\kappa^2$ 的分立能级，反之亦然. 由于存在两个极小值，这个能级便以 $\Delta\kappa \sim e^{-\kappa L}$（重叠积分）分裂开来，其中 L 是极小值间的距离. 由此（因 $\Delta\kappa$ 我们已经知道），$L \sim \frac{1}{\kappa} \ln \frac{1}{\Delta\kappa}$ 便得到公式 (16).

最后，我们指出公式 (15) 的著名结果：一孤子的总相移等于该孤子分别同所有其余孤子的散射相移之和，即 N 个孤子解中完全没有多粒子效应.

§ 4. 作为哈密顿系统的 KdV 方程

与本书所研究的其它一些方程不同，KdV 方程的哈密顿形式并不十分明显，因此，需作一定地说明.

首先让我们回忆一下，哈密顿系统的比较一般的定义. 在维数为 n 的偶维相空间 M 中，哈密顿结构由泊松括号给出. 泊松括号 $\{f, g\}$ 把 M 中的每一对函数 $f, g(f, g: M \to R)$ 同第三个函数 $h = \{f, g\}(h: M \to R)$ 对应起来. 当点 $\xi \in M$ 的坐标为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 时，那么按定义，运算 $\{,\}$ 便有下面

形式：

$$\{f, g\} = \sum_{i,k=1}^{n} \omega^{ik}(\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial g}{\partial \xi_k}, \tag{1}$$

式中 ω 是非退化的 $n \times n$ 阶矩阵. 泊松括号一定要具有反对称性：

$$\{f, g\} = -\{g, f\}. \tag{2}$$

这就意味着，矩阵 $\omega^{ik}(\xi)$ 是反对称的：

$$\omega^{ik}(\xi) = -\omega^{ki}(\xi). \tag{3}$$

除此以外，泊松括号应满足雅可比恒等式

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0 \tag{4}$$

此恒等式等价于和矩阵 $\omega^{ik}(\xi)$ 有关的某一方程系统，其中 ω 的逆矩阵 $W(W_{ik} = (\omega^{-1})_{ik})$ 所满足的方程同麦克斯韦方程组的头一对相符：

$$W_{ik,l} + W_{li,k} + W_{kl,i} = 0. \tag{4a}$$

在数学文献中此方程定义一个微分形式，即表示 $W = W_{ik} d\xi^i \wedge d\xi^k$，式中 $d\xi^i \wedge d\xi^k = -d\xi^k \wedge d\xi^i$. 方程 (4a) 称为 W 形式的“封闭性”.

泊松括号将相空间函数的线性空间变成李代数. 选取某一函数 $h(\xi)$ 并称之为哈密顿函数. 我们将用下面微分方程

$$\frac{df}{dt} = \{f, h\}, \tag{5}$$

来确定李代数的自身映象 $(f(\xi) \to f(\xi, t), f(\xi, 0) = f(\xi))$ 对参数 t 的依赖关系. 特别是当选取 f 的形式为

$$f(\xi, t) = \prod_{i=1}^{n} \delta(\xi_i - \xi_i(t))$$

时，便得到 $\xi_i(t)$ 所满足的方程：

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_k \omega^{ik} \frac{\partial h}{\partial \xi_k} \tag{6}$$

此即哈密顿方程.

借助于相空间中的线性变换可以把任何一个反对称的非退化矩阵 ω 化简成分块对角矩阵形式

$$\omega = \begin{pmatrix} J & 0 & & \cdot & & \cdot \\ 0 & J & 0 & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & J & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & & \cdot & 0 & J \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

用 $\xi_{2k-1} = p_k$, $\xi_{2k} = q_k$, $k = 1, \cdots, n/2$ 表示在 M 中的相应坐标，从 (6) 中得到方程:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial h}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial h}{\partial p_k},$$

即通常的哈密顿方程形式. 成对变量 p_k 和 q_k 是正则共轭的. 用这种变量，泊松括号写成下面形式:

$$\{f, g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}\right).$$

下面直接转到 KdV 方程. 注意到，此方程可以重写成如下形式

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}(3u^2 - u_{xx}) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u(x)}, \tag{7}$$

式中泛函 H 为

$$H[u] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{u_x^2}{2} + u^3\right)dx, \tag{8}$$

符号 $\delta/\delta u$ 表示变分导数. 其次，将 $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u(x)}$ 写成

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x - x')\frac{\delta H}{\delta u(x')}dx',$$

这就证实了方程 (7) 具有 (6) 的形式. 同时 u 在直线 x 上各点取值的集合应理解为函数 u 的坐标(相空间中的点)，因此，

x 和 x' 起公式 (6) 中的指标作用；$\omega(x, x') = -\delta'(x - x')$，即函数 ω 显然是反对称的，同时对 $|x| \to \infty$ 时衰减为零的函数来说，由于算子 $\partial/\partial x$ 的可逆性，ω 也是非退化的. 其次，由于 ω 与相空间中的点 u 无关，则泊松括号

$$\{S, R\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta S}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta R}{\delta u(x)} dx \tag{9}$$

满足雅可比恒等式 (4).

于是，KdV 方程是哈密顿方程. 泛函 $H(8)$ 是哈密顿函数，相空间是由在无穷远处衰减为零的充分光滑函数 $u(x)$ 构成的，哈密顿结构由泊松括号 (9)，即由 $L_2(R)$ 中的反对称算子 $\partial/\partial x$ 给出.

在结束这节时，我们指出，任何一个形如 $u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}$ 的方程(其中哈密顿H具有平移不变性)，则至少有三个运动积分. 其中，第一个显然就是哈密顿函数 H. 另外一个积分是同泊松括号 (9) 的结构，也即同 (9) 中存在算子 $\frac{\partial}{\partial x}$ 有关，就是 $\int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx$. 最后一个，起动量守恒作用的第三个积分是同哈密顿函数H的平移不变性有关. 就是说，对任何函数 $u(x)$，如果 $H[u(x+a)] - H[u(x)] = 0$，那么泛函 $H[u(x+a)]$ 按 a 展开，当 $a \to 0$ 时，我们得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta H}{\delta u} \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

注意到 $u(x) = \frac{1}{2} \frac{\delta P}{\delta u}$，$P = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$，我们求出

$$\{P, H\} = 0,$$

即 $\dot{P} = 0$ (参看 (5)).

§5. 多项式形式的运动积分

KdV 方程存在无穷多个运动积分的集合. 这是由于 GGKM 方程，对每一个 $k(0<k<\infty)$，函数 $a(k)$ 都是 u 的单值确定的泛函. 不过，这些泛函是用隐式形式确定的(借助于薛定谔方程的解). 在这节我们按 $a(k)$ 建立下面形式的运动积分

$$I_n=\int_{-\infty}^{\infty}P_n(u,u_x,u_{xx},\cdots,u_x^{(l)})dx,$$

式中 P 是函数 $u(x)$ 及其导数的多项式. 这种类型的积分称为定域多项式积分.

当 $|k|$ 足够大时，薛定谔方程的解 $\varphi(x,k)$ 可以写成

$$\varphi(x,k)=\exp\left(-ikx+\int_{-\infty}^{x}\chi(x',k)dx'\right).$$

如果 $\mathrm{Im}k>0$，那么当 $x\to\infty$ 时，$\varphi(x,k)e^{ikx}=a(k)$. 因此，

$$\ln a(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(x,k)dx. \qquad (1)$$

因为当势 $u(x)$ 按 KdV 方程改变时，$a(k)$ 不依赖于时间，那么表达式 $\int\chi(x,k)dx$ 对所有 k 都是运动积分. 此外，由于 $\varphi(x,k)$ 是薛定谔方程的解，函数 $\chi(x,k)$ 便满足黎卡提(Ricatti) 方程：

$$\chi_x+\chi^2-u-2ik\chi=0, \qquad (2)$$

从而允许渐近展开

$$\chi(x,k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_n(x)}{(2ik)^n}. \qquad (3)$$

把此展开式代入到方程 (2)，便得到 $\chi_n(x)$ 的递推公式:

$$\chi_{n+1}(x) = \frac{d}{dx}\chi_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1}\chi_k(x)\chi_{n-k}(x),$$
$$n = 1, 2, \cdots,$$
$$\chi_1(x) = -u(x). \tag{4}$$

前几个系数 $\chi_n(x)$ 是

$$\chi_2 = -u_x(x), \quad \chi_3 = -u_{xx} + u^2,$$
$$\chi_4 = -u_{xxx} + 2\frac{d}{dx}u^2,$$
$$\chi_5 = -u_x^{(4)} + \frac{d^2}{dx^2}u^2 + u_x^2 + 2u_{xx}u - 2u^3.$$

我们看出，$\chi_2(x)$ 和 $x_4(x)$ 是全微商. 这个性质对所有 $\chi_{2n}(x)$ 都成立. 实际上假定方程 (2) 中的 k 都是实的，并把 $\chi(x, k)$ 写成实部与虚部之和的形式：$\chi = \chi_R + i\chi_I$. 然后再把 (2) 中的虚部分出来，我们求出

$$\frac{d\chi_I}{dx} + 2\chi_R\chi_I - 2k\chi_R = 0,$$

由上式可得 $\chi_R = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\ln(\chi_I - k)$，即 $\chi_R(x)$ 是全微商；而系数 $\chi_{2n}(x)$ 显然是 $\chi_R(x)$ 的渐近展开系数.

我们表示为

$$2I_{n-1} = \int_{-\infty}^{\infty}\chi_{2n+1}(x)dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{5}$$

由于 (1), (3), I_n 是 KdV 方程的运动积分. 列出前四个显示形式：

$$2I_{-1} = -\int_{-\infty}^{\infty}u(x)dx, \quad 2I_0 = \int_{-\infty}^{\infty}u^2(x)dx,$$
$$2I_1 = -\int_{-\infty}^{\infty}(u_x^2 + 2u^3)dx, \tag{6}$$
$$2I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}(u_{xx}^2 - 5u^2u_{xx} + 5u^4)dx.$$

正如前节所指出的那样，I_n 的前三个有简单的解释，并且对

于所有 $u_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta u}$ 类型的方程，这种解释的起源都是一样的．守恒量 I_{-1} 同对应于 KdV 方程的泊松括号结构有关；守恒量 I_0 是 KdV 方程平移不变性的结果，即 I_0 起动量作用而 I_1 乃是 KdV 方程的哈密顿函数且具有能量意义． $n \geqslant 2$ 的高阶 I_n 没有简单解释．

我们已经得到了递推公式(4)，该公式允许以 $u(x)$ 来建立多项式运动积分 I_n．现在直接用 $a(k)$ 表示 I_n．为此我们利用公式(1.8)，并把它重新写成

$$\ln a(k) = \sum_{l=1}^{N} \ln \frac{k - i\kappa_l}{k + i\kappa_l} + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(k')| dk'}{k' - k + i0}. \tag{7}$$

对无限光滑的势 $u(x)$（而且也只有对这类势 $u(x)$，所有 $I_n(n < \infty)$ 才有意义）来说，反射系数 $r(k)$，当 $|k| \to \infty$ 时，要比 $1/|k|$ 的任何幂次都下降得快．因此，计算 $\ln a(k)$ 按 $1/k$ 幂次的渐近展开式系数，我们可以忘记(7)式积分中分母中的符号 $i0$．此外，由于 $|a(-k)| = |a(k)|$，因此，在这种展开式中，$1/k$ 的偶次幂系数等于零，故

$$\ln a(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i}{k^{2j+1}}\left[\frac{2(-1)^{j+1}}{2j+1}\sum_{l=1}^{N} \kappa_l^{2j+1} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} k^{2j} \ln |a(k)| dk\right]. \tag{8}$$

现在比较关系式(1)，(3)，(8)和(15)，得到

$$2I_{j+1}[u] = \frac{2^{2(j+1)}}{2j+1}\sum_{l=1}^{N} \varkappa_l^{2j+1} + 2^{2(j+1)}(-1)^{j+1}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} k^{2j} \ln |a(k)| dk, \tag{9}$$

其中，哈密顿 $H = -I_1$ 为

$$H=-\frac{32}{5}\sum_{l=1}^{N}\kappa_l^5+\frac{32}{\pi}\int_0^\infty k^4\ln|a(k)|dk. \qquad (10)$$

有趣地注意到，连续谱变量对能量的贡献是正的(因 $|a(k)|\geqslant 1$)，而分立谱对能量的贡献是负的.

§6. KdV 方程的完全可积性. 高阶 KdV 方程

上面我们已经建立了有关 KdV 方程的一系列非常优美而又令人十分惊奇的一些事实. 首先，存在一个变量代换，它把薛定谔算子的势过渡到这种势的散射数据，这样的变换，使得 KdV 方程(非线性偏微分方程)在新变量中化成平凡可积的常微分方程的无限集——GGKM 方程. 其次，我们还建立了 KdV 方程的定域多项式积分的可数集，至于它们的意义，诚然，除了前三个积分以外(其中一个是 KdV 方程的哈密顿)，其余的暂时还不十分清楚.

所有这些事实，当把 KdV 方程看成哈密顿系统时，便得到一个自然的解释. 这就是说，KdV 方程原来是一个完全可积的哈密顿系统；$u(x)\to$"散射数据"这种代换是这样一种变换，它把相空间变换到作用——角类型的变量，而作为 KdV 方程的积分的每一个多项式 $I_i[u]$，本身也同样确定了一个完全可积的哈密顿系统，它所给出的非线性偏微分方程为

$$u_t=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_i}{\delta u(x)}. \qquad (1)$$

当 $i\geqslant 3$ 时，方程(1)称为高阶 KdV 方程；对它们的积分是借助于同 KdV 方程相同的变量代换并且也有象 KdV 方程那样的运动积分.

应注意到，直到出现了具有大量自由度可积系统的一些非平凡例子的逆散射问题方法为止，这一事实才为人们所知道. 所存在的这些例子都已归结为线性问题.

对“线性 KdV 方程”

$$u_t = -u_{xxx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_l}{\delta u}$$

来说，相应的哈密顿量为

$$H_l = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx.$$

用 $u(x)$ 的傅里叶变换，便得到作用——角变量．引入一个复函数 $c(p)(p>0)$

$$c(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x)e^{-ipx}dx,$$

并利用泊松括号 (4.9) 的表达式，容易得到，

$$\{c(p), \bar{c}(p')\} = i\delta(p-p'), \quad \{c(p), c(p')\} = 0,$$

即 $c(p)$ 和 $\bar{c}(p)$ 为正则共轭变量．哈密顿量用变量 $c(p)$ 表示，我们得到

$$H_l = \int_0^{\infty} p^3\bar{c}(p)c(p)dp.$$

同时系统的总动量 $P = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$ 为

$$P = -\int_0^{\infty} p\bar{c}(p)c(p)dp.$$

在新变量中，运动方程形式为 $\dot{c}(p) = \{c(p), H_l\}$ 或者为

$$\dot{c}(p) = ip^3c(p), \quad 即 \quad c(p,t) = c(p,0)e^{ip^3t}.$$

变量 $c(p)$，$\bar{c}(p)$ 是量子力学产生和消灭算子的经典类似物；作用型变量 $N(p)$ 乃是动量为 P 的状态占据数．

$$N(p) = \bar{c}(p)c(p).$$

$N(p)$ 的正则共轭变量为 $c(p)$ 的相，$\Phi(p) = \arg c(p)$，于是

$$\{N(p), \Phi(p')\} = -\delta(p-p'),$$

$$\{N(p), N(p')\} = \{\Phi(p), \Phi(p')\} = 0.$$

在作用——角变量中，哈密顿量仅依赖于整个变量集合中的

一半，它是作用变量的函数

$$H_l = \int_0^\infty p^3 N(p) dp,$$

因此运动方程表示为

$$\dot{N}(p) = 0, \quad \dot{\phi}(p) = p^3.$$

下面转到这节的直接问题，引进 KdV 方程的作用——角变量. 首先我们指出用散射数据所表示的正则变量. 为此，必须算出散射数据的全部可能对的泊松括号 (4.9). 例如考虑 $\{a(k), b(k')\}$

$$\{a(k), b(k')\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta a(k)}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta b(k')}{\delta u(x)} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta a}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta b}{\delta u} - \frac{\delta b}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta a}{\delta u} \right) dx. \tag{2}$$

为了计算 $\frac{\delta a(k)}{\delta u(x)}$, $\frac{\delta b(k)}{\delta u(x)}$, 我们利用表达式 (1.13):

$$\frac{\delta a(k)}{\delta u(x)} = \frac{1}{2ik} \left[\frac{\delta \varphi(y, k)}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial y} \bar{\phi}(y, k) - \frac{\delta \bar{\phi}(y, k)}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, k) + \varphi(y, k) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta \bar{\phi}(y, k)}{\delta u(x)} - \bar{\phi}(y, k) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta \varphi(y, k)}{\delta u(x)} \right]. \tag{3}$$

显然，函数 $G(x, y, k) = \frac{\delta \varphi(y, k)}{\delta u(x)}$ 满足薛定谔方程对 $u(x)$ “微商”所得到的方程

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + u(y)G = k^2 G - \delta(x-y)\varphi(y, k), \tag{4}$$

同时，因 $\varphi(y, k)$ 由 $y \to -\infty$ 时的渐近值确定，故方程 (4) 的解 $G(x, y, k)$ 得用下面的辅助条件确定

$$G(x, y, k) = 0 \quad 当 \; y < x.$$

作为方程(4)的解，$G(x, y, k)$ 对所有 y 来说是 y 的连续函数；但 $\partial G/\partial y$ 在 $y = x$ 点上有间断．从(4)容易求出在该点右边的边界条件 $\frac{\partial G(x, y, k)}{\partial y}$ 为

$$\left.\frac{\partial G(x, y, k)}{\partial y}\right|_{y\to x+0} = \varphi(x, k). \tag{5}$$

现在我们利用表达式(3)的右边与 y 无关的这一情况． 令 $y = x + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$. 因函数 $\psi(y, k)$ 的值由 $y \to +\infty$ 时的渐近值所确定，显然，它与 y 点左边的势值无关，故 $\delta\psi(y, k)/\delta u(x) = 0$ $(y > x)$，从而公式(3)有下面形式

$$\frac{\delta a(k)}{\delta u(x)} = -\frac{1}{2ik}\bar{\Phi}(x, k)\varphi(x, k). \tag{6}$$

完全类似地求出

$$\frac{\delta b(k)}{\delta u(x)} = \frac{1}{2ik}\psi(x, k)\varphi(x, k). \tag{7}$$

将所得到的表达式代入到(2)，得到问题要计算的积分：

$$\{a(k), b(k')\} = \frac{1}{8kk'}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\bar{\Phi}(x, k)\varphi(x, k)$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x}\psi(x, k')\varphi(x, k') - \psi(x, k')\varphi(x, k')$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x}\bar{\Phi}(x, k)\varphi(x, k)\Big]dx. \tag{8}$$

其实，(8)中的被积函数是全微商．实际上，令 f_1, g_1, f_2, g_2 是本征值 k^2 分别为 k_1^2, k_2^2 的薛定谔方程的任意一对解，即

$$-\frac{d^2 f_{1,2}}{dx^2} + u(x) f_{1,2} = k_{1,2}^2 f_{1,2},$$

$$-\frac{d^2 g_{1,2}}{dx^2} + u(x) g_{1,2} = k_{1,2}^2 g_{1,2}.$$

于是，不难证明

$$f_1g_1\frac{d}{dx}f_2g_2-f_2g_2\frac{d}{dx}f_1g_1$$

$$=\frac{1}{k_1^2-k_2^2}\frac{d}{dx}[(f_1f_{2x}-f_2f_{1x})(g_1g_{2x}-g_2g_{1x})]. \qquad (9)$$

令 $f_1=\bar{\psi}(x,k)$, $f_2=\psi(x,k')$, $g_1=\varphi(x,k)$, $g_2=\varphi(x,k')$, 从 (8), (9) 求出

$$\{a(k),b(k')\}=\frac{1}{8kk'}\lim_{x\to+\infty}\Big[a(k)a(k')e^{-2ik'x}$$

$$-b(k)b(k')e^{2ikx}-\frac{k+k'}{k-k'}a(k)b(k')$$

$$-\frac{k+k'}{k-k'}a(k')b(k)e^{2i(k-k')x}\Big]$$

$$-\frac{1}{8kk'}\lim_{x\to-\infty}\Big[-a(k)\bar{a}(k')e^{-2ik'x}+\bar{b}(k)b(k')e^{-2ikx}$$

$$-\frac{k-k'}{k+k'}a(k)b(k')-\frac{k-k'}{k+k'}\bar{a}(k')\bar{b}(k)e^{-2i(k+k')x}\Big]. \qquad (10)$$

这里，我们曾利用了下面情况：当 $x\to+\infty$ 时

$$\psi(x,k)\to e^{-ikx},\quad \varphi(x,k)\to a(k)e^{-ikx}+b(k)e^{ikx},$$

而当 $x\to-\infty$ 时，

$$\varphi(x,k)\to e^{-ikx},\quad \psi(x,k)\to\bar{a}(k)e^{-ikx}-b(k)e^{ikx}.$$

现在必须阐明，(10) 中所出现的极限应该按哪种意义上去理解. 为此要注意到，在计算 $u(x)$ 的泛函泊松括号时，总是要对含有 k, k' 的光滑函数按 k, k' 积分形如 $\{a(k),b(k')\}$ 这种类型的量. 因 $\{a(k),b(k')\}$ 包含有奇异分母，因此，我们约定这样的积分是主值意义上的. 现在利用广义函数理论中的熟知关系式

$$\lim_{x\to\infty} P\frac{e^{ikx}}{k} = \pi i\delta(k),$$

式中 P 表示主值部分，从 (9) 我们得到

$$\{a(k), b(k')\} = \frac{1}{2}\frac{a(k)b(k')}{k^2-k'^2}$$

$$-\frac{\pi i}{4k}a(k)b(k)\delta(k-k').$$

用类似方法算出散射数据其余几对元素的泊松括号．算出它们之后，不难证明下面的量

$$n(k) = \frac{2k}{\pi}\ln|a(k)|^2,\ \varphi(k) = \arg b(k),\ k>0 \quad (11)$$

满足正则交换关系：

$$\{n(k), n(k')\} = \{\varphi(k), \varphi(k')\} = 0,$$

$$\{\varphi(k), n(k')\} = \delta(k-k').$$

在一般情形中，散射数据同样含有分立谱的特征，为了计算含有这些特征的泊松括号，必须求出变分导数 $\delta\kappa_n^2/\delta u(x)$, $\delta b_n/\delta u(x)$. 从微扰论熟知的公式，求出这些导数中的头一个的表达式：

$$-\delta\kappa_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\delta u(x)f_n^2(x)dx\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_n^2(x)dx\right]^{-1},$$

式中 $f_n(x)$ 是薛定谔算子的本征值为 $-\kappa_n^2$ 之本征函数. f_n 取作 $\varphi(x, i\kappa_n)$, 并利用该函数的范数表达式 (1.15), 求出

$$\frac{\delta\kappa_n^2}{\delta u(x)} = -\varphi^2(x, i\kappa_n)[ia'(i\kappa_n)b_n]^{-1}. \quad (12)$$

为了计算 $\delta b_n/\delta u(x)$, 采用以下标准方法：在某个有限间隔内"截断"势 $u(x)$, 即考虑在此间隔以外等于零的势. 对于被截断的势来说，所有解 $\varphi(x, k)$, $\psi(x, k)$ 都可以从实轴到复平面 k 上的任何一点作解析延拓. (从方程的解对参数的解析关系定理得出这一结论.) 因此对有限势 (Финитный

потенциал）来说，

$$b_n = b(i\kappa_n).$$

而 b_n 的变分导数从公式(7)(其中应假定 $k = i\kappa_n$) 求出. 算出含有 κ_n, b_n 的泊松括号(利用公式 (9) 不难求出所出现的积分),求出变量

$$N_l = \kappa_l^2, \ \Phi_l = 2\ln \frac{1}{|b_l|} \quad (l = 1, 2, \cdots, N) \quad (13)$$

同样存在正则交换关系:

$$\{N_l, \Phi_{l'}\} = -\delta_{ll'}, \quad \{N_l, N_{l'}\} = \{\Phi_l, \Phi_{l'}\} = 0$$

除此之外,这些变量同连续谱变量 $n(k)$, $\varphi(k)$ 是对易的.

正则变量的集合——$n(k)$, $\varphi(k)$, N_l, Φ_l, $l = 1, \cdots, N$ 显然是完备的,因为散射数据被它们单值地确定出来:

$$\gamma(k) = [1 - e^{-\frac{\pi n(k)}{2k}}]^{1/2}$$

$$\times \exp\left\{i\varphi_k + \frac{ik}{2}\int_0^\infty \frac{n(k')}{k'(k'^2 - k^2)} dk'\right\} \prod_{l=1}^{N} \frac{k + iN_l^{1/2}}{k - iN_l^{1/2}}, \quad (14)$$

$$\kappa_l = N_l^{1/2}, \ b_l = (-1)^{l+1} e^{-\Phi_l/2}.$$

我们已经完成了我们程序的第一部分,在由函数 $u(x)$ 所组成的具有泊松括号为 (4.9) 的相空间中，引入了正则坐标 $n(k)$, $\varphi(k)$, N_l, Φ_l. 其次,利用前节的公式,我们可以指出,多项式泛函 $I_j[u]$ 在这种坐标下的显示形式. 公式 (5.9) 直观上看出如下:

$$2I_{j+1}[u] = \frac{2^{2(j+1)}}{2j+1}\sum_{l=1}^{N} N_l^{\frac{2j+1}{2}} + 2^{2j}(-1)^{j+1}\int_0^\infty k^{2j-1} n(k) dk. \quad (15)$$

因为所有 $n(k)$, N_l 彼此都是对易的,因此,泛函 $I_j[u]$ 的泊松括号等于零:

$$\{I_j, I_{j'}\} = 0 \quad (16)$$

(对任何 j 和 j'). 这就意味着

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta I_j}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_{j'}}{\delta u} dx = 0. \tag{17}$$

(17) 中的被积表达式乃是 $u(x)$ 及其导数的某种多项式．当函数 $u(x)$ 为任意形式时，该多项式的积分等于零表明，$\frac{\delta I_j}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_{j'}}{\delta u}$是全微商：

$$\frac{\delta I_j}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta I_j'}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial x} F_{j,j'},$$

式中 $F_{j,j'}$-同样是 $u(x)$ 及其导数的多项式． 这一事实能推断，用前节的递推公式所构成的泛函 I_j 彼此相互对易，甚至当 $u(x)$ 是 x 的周期性函数(这种情形迄今还没研究)也是如此．特别，这意味着 KdV 在周期性情形下，也存在运动积分的可数集：

$$\frac{d}{dt} I_j[u] = 0.$$

不过，现在我们还是回到 $u(x)$ 在无穷远处衰减的情形．考虑泛函H为

$$H = \sum_{j=1}^{M} C_j I_j[u] \qquad M < \infty. \tag{18}$$

我们可以阐明H是哈密顿函数，即可以考虑下面形式的偏微分方程：

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u}. \tag{19}$$

任何这种形式的方程将是完全可积的，因为这里H所包含的正则变量仅仅是 $n(k)$，N_l 的函数而与角变量 $\varphi(k)$，Φ_l 无关．其中，KdV 方程就是完全可积的，它的哈密顿量在新变量中具有下面形式：

$$H = -\frac{32}{5}\sum N_l^{5/2} + 8\int_0^\infty k^3 n(k) dk. \qquad (20)$$

运动方程

$$\dot{n} = 0,\ \dot{\varphi} = 8k^3,\ \dot{N}_l = 0,\ \dot{\Phi}_l = -16N_l^{3/2}$$

又非常准确地推出 GGKM 方程(2.3),(2.8),并且平凡地被积分为

$$n(k, t) = n(k, 0),\quad \varphi(k, t) = \varphi(k, 0) + 8k^3 t,$$

$$N_l(t) = N_l(0),\qquad \Phi_l(t) = \Phi_l(0) - 16N_l^{3/2} t.$$

具有哈密顿量(18)的任意"高阶" KdV 方程(19),情形也是一样的. 所有这些方程保持薛定谔算子的本征值守恒,并存在函数 $a(k)$ 及多项式积分 $I_i[u]$ 作为运动积分. 而角变量对时间的依赖关系由下面公式给出:

$$\varphi(k, t) = \varphi(k, 0) + \frac{\delta H}{\delta n} t,$$

$$\Phi_l(t) = \Phi_l(0) + \frac{\partial H}{\partial N_l} t.$$

同时,从(15),(18)看出,$\frac{\delta H}{\delta n}$ 乃是 k 的奇次幂多项式

$$\frac{\delta H}{\delta n(k)} = \sum a_n k^{2n-1} = P(k).$$

由此可见,当势 $u(x)$ 按高阶 KdV(19) 演化时,反射系数对时间的依赖关系具有下面形式:

$$r(k, t) = r(k, 0) e^{iP(k)t}. \qquad (21)$$

下面让我们研究一个系数依赖于 $u(x)$ 及其导数的 $2m+1$ 次幂的微分算子 A_m. 这样的算子,第一,当 $u \equiv 0$ 时,它等于 $\frac{1}{2} P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$, 第二,它满足条件

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - u(x), A_m\right] = F(u, u_x, \cdots, u^{(2m+1)}),$$

式中 F 是乘函数的算子. 显然,这样的算子 A_m 是存在的;对它的系数来说,不难得到能用 $u(x)$ 来表示这些系数的递推公式. 另外,方程

$$u_t = F(u, u_x, \cdots, u_x^{(2m+1)}), \tag{22}$$

同样可写成下面形式的 Lax 表象:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L, A_m].$$

因为散射数据随时间演化,借助于(22)有(21)形式的结构,因此,上面的 Lax 表象将同方程(19)完全一致. 这样,所有高阶 KdV 方程存在 Lax 表象. 在研究 KdV 的周期性解时,我们将用到这些事实.

§7. 微分-差分系统

逆散射问题方法也可以用来研究常微分方程组. 例如,我们研究系统:

$$\frac{dc_n}{dt} = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad -\infty < n < \infty, \quad c_n(t) > 0. \tag{1}$$

特别是在等离子体中研究朗谬振荡谱的精细结构时,便产生这种系统. 正因为这一点,有时我们把系统(1)称为"朗谬链". 我们用一对无限方阵 L 和 A, 将方程(1)写成 Lax 形式 $\dot{L} = [L, A]$, 其中 L 和 A 的矩阵元为

$$L_{nm} = c_n^{1/2}\delta_{n,m+1} + c_m^{1/2}\delta_{n+1,m}, \tag{2}$$

$$A_{nm} = \frac{1}{2}[c_n^{1/2}c_{n-1}^{1/2}\delta_{n,m+2} - c_m^{1/2}c_{m-1}^{1/2}\delta_{n+2,m}], \tag{3}$$

式中 δ_{nm} 是 Kronecker 符号: 当 $n \neq m$ 时, $\delta_{nm} = 0$, 而当 $n = m$ 时, $\delta_{nm} = 1$. 直接算出对易子 $LA - AL$, 证明此对易子等于按公式(1)算出的 dL/dt.

可积的微分-差分系统的另一个例子是描述粒子最近邻

之间具有指数相互作用的一维粒子链的动力学方程组:

$$\frac{d^2x_n}{dt^2} = e^{x_{n+1}-x_n} - e^{x_n-x_{n-1}}, \tag{4}$$

式中 $x_n(t)$ 可理解为点阵中第 n 个原子的坐标. 系统 (4) 称为 Toda 链, 因为 Toda 在 1970 年首先研究了这种类型的点阵, 并发现方程 (4) 的精确解——描述点阵中位错运动的孤子. 方程 (4) 恒等于下面形式:

$$\dot{c}_n = c_n(v_n - v_{n-1}), \quad \dot{v}_n = c_{n+1} - c_n, \tag{5}$$

其中 $v_n = \dot{x}_n$, $c_n = \exp(x_n - x_{n-1})$, $c_n > 0$.

用下面一对算子 L -- A 来积分方程 (5):

$$L_{nm} = c_n^{1/2}\delta_{n,m+1} + c_m^{1/2}\delta_{n+1,m} + v_n\delta_{nm}, \tag{6}$$

$$A_{nm} = 1/2(c_n^{1/2}\delta_{n,m+1} - c_m^{1/2}\delta_{n+1,m}). \tag{7}$$

注意到,算子 (6) 同算子 (2) 只差一个对角矩阵.

方程 (1) 类似于 KdV 方程的差分形式,并且在连续极限下方程 (1) 变成 KdV 方程. 为了证实这一点,让我们研究满足方程 (1) 的函数 $c(x, t)(-\infty < x < \infty)$:

$$\dot{c}(x) = c(x)[c(x+\delta) - c(x-\delta)].$$

我们将取 $0 < \delta \ll 1$, 并且假定 $c(x)$ 关于 x 的微商有足够多的次数. 另外,我们还假定

$$c(x) = 1 - \delta^2 v(x),$$

式中 $v(x)$ 满足方程

$$\dot{v} = v(x+\delta) - v(x-\delta) - \delta^2 v(x)[v(x+\delta) - v(x-\delta)].$$

将上方程右边按 δ 展成幂级数并准确到 δ^3 项:

$$\dot{v} = 2\delta v_x + \frac{1}{3}\delta^3 v_{xxx} - 2\delta^3 v(x) v_x + O(\delta^5).$$

用伽里略变换 $t = t'$, $x' = x + 2\delta t$, 将 $2\delta v_x$ 消去;采用带撇的变量,则上方程具有下面形式:

$$\frac{\partial v}{\partial t'} = \frac{1}{3}\delta^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x'^3} - 2\delta^3 v \frac{\partial v}{\partial x'} + O(\delta^5).$$

最后，令 $-\frac{\delta^3}{3}t' = \tau$，我们得到

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + 6v\frac{\partial v}{\partial x} + O(\delta^2).$$

现在让 $\delta \to 0$，便得到 KdV 方程.

用算子 L-A 对的形式也可以实现类似的极限过渡．为此我们研究 Lax 方程的相应表象：

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_{nm}\phi_m = \lambda\phi_n, \quad \frac{d\phi_n}{dt} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{nm}\phi_m = 0,$$
$$-\infty < n < \infty, \tag{8}$$

式中算子 L 和 A 是由公式 (2) 和 (3) 定义的．将 (8) 的头一个方程写成

$$\begin{aligned}&(1 - \delta^2 v(x))^{1/2}\phi(x - \delta)\\ &\quad + (1 - \delta^2 v(x + \delta))^{1/2}\phi(x + \delta) - 2\phi(x)\\ &= (\lambda - 2)\phi(x)\end{aligned}$$

并把此式按 δ 展开，得到

$$\delta^2(\phi_{xx} - v(x)) = (\lambda - 2)\phi(x) + O(\delta^3).$$

我们表示 $\lambda - 2 = -\delta^2 k^2$，这时

$$\phi_{xx} - v(x)\phi = -k^2\phi + O(\delta).$$

对方程 (8) 的第二个方程作类似的程序，并考虑到上面曾用过的代换 $x \to x'$，$t \to t' \to z$，我们求出

$$\phi_z + A\phi = O(\delta),$$

式中 A 同 (2.5) 完全相同．就这种意义上，(2) 和 (3) 的对算子 L-A，其连续极限相应于 KdV 方程的对算子，而算子 (2)类似于 Sturm-Lioville-Schrödinger 算子的有限差分．最后，我们提醒一下，系统 (4) 的连续极限为非线性弦方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}u^2,$$

此方程可同样借助于逆问题方法来积分[6].

下面我们着手研究系统 (1), (4) 的柯西问题. 在无限链的情况下,自然的边界条件是: 对于朗谬链 (1), 当 $|n|\to\infty$ 时, $c_n\to 1$, 而对于 Todu 链 (4), 当 $|n|\to\infty$ 时, $c_n\to 1$, $v_n\to 0$. 在后一情形中, $c_n=1$ 相当 $x_n-x_{n-1}=0$. 如果 x_n 为第 n 个粒子偏离平衡位置 $x_n=0$ 处的位移,那么所采用的边界条件就意味着,在无穷远处的点阵, 一般来说, 用移动静止的点阵 $x_n=0$ 便可得到. 按照逆问题方法的图象 (§2), 在求解上面所研究的方程的柯西问题时, 首先应研究相应算子 L 的散射正问题和逆问题. 建立这些问题的方法是很自然的并且同薛定谔算子的散射理论有许多共同之处.

算子 $L(6)$ 的本征函数方程为

$$\sqrt{c_n}\,\psi_{n-1}+\sqrt{c_{n+1}}\,\psi_{n+1}+v_n\psi_n=\lambda\psi_n,-\infty<n<\infty; \tag{9}$$

我们将把 ψ_n 取作复数. 同朗谬链有关的算子 L, 它的本征函数满足 $v_n=0$ 时的方程 (9). 我们将认为,问题 (9) 的系数满足下面条件:

$$\prod_{-\infty}^{\infty}c_n^{-1/2}<\infty,\quad \left|\sum_{-\infty}^{\infty}v_n\right|<\infty. \tag{10}$$

对 Toda 链的情况而言,头一个条件表明, n 取无限大时,点阵位移是有限的,而第二个条件显然表明动量的有限性. (曾引用过的表达式显然是系统 (5) 的运动积分.)

问题 (9) 存在填满线段 $-2\leqslant\lambda\leqslant 2$ 的简并连续谱;此外,一般来说,问题 (9) 还有分立谱. 分立谱本征值的模大于 2, 相应的本征函数 ψ_n 是平方可加的. 连续谱的本征函数 $\psi_n(x)$ 对所有 n 都是有界的. 如果 λ 属于连续谱, 那么当 $n\to\pm\infty$ 时, ψ_n 的渐近形式为

$$\psi_n = c_1 z^n + c_2 z^{-n} + O(1),\ |z| = 1,\ \lambda = z + z^{-1}.$$

引入问题 (9) 的特解 $\psi_n(z)$ 和 $\varphi_n(z)$，它们由下面的渐近形式所确定:

$$\psi_n(z) = z^n + O(1), \quad n \to \infty,$$
$$\varphi_n(z) = z^{-n} + O(1), \quad n \to -\infty.$$

对任何 n 来说,函数 $\varphi_n(z)$ 和 $\psi_n(z)$ 在复平面 z 的单位圆内是解析的. (9) 的第二对特解 $\tilde{\psi}_n(z)$, $\tilde{\varphi}_n(z)$ 由下面渐近形式所确定:

$$\tilde{\psi}_n(z) = z^{-n} + O(1), \quad n \to +\infty,$$
$$\tilde{\varphi}_n(z) = z^n + O(1), \quad n \to -\infty,$$

它们在此单位圆外是解析的[1]. 显然,在单位圆周上,

$$\tilde{\psi}_n(z) = \bar{\psi}_n(z),\ \tilde{\varphi}_n(z) = \bar{\varphi}_n(z),\ |z| = 1.$$

将此关系延拓到复平面上,得到

$$\psi_n\left(\frac{1}{z}\right) = \tilde{\psi}_n(z) = \bar{\psi}_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right),$$

$$\tilde{\varphi}_n(z) = \bar{\varphi}_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \varphi_n\left(\frac{1}{z}\right). \tag{11}$$

在 z 平面上 ($\lambda = z + z^{-1}$), 问题 (9) 的连续谱乃是单位圆周. 当 $|z| = 1$ 时,解 $\psi_n(z)$ 和 $\bar{\psi}_n(z)$ 是线性无关的. 此外,由于方程 (9) 的线性无关解的个数不多于两个,所以 (9) 的任何一个解应是 $\psi(z)$ 和 $\bar{\psi}(z)$ 的线性组合. 其中

$$\varphi_n(z) = a(z)\bar{\psi}_n(z) + \beta(z)\psi_n(z),\ |z| = 1. \tag{12}$$

对于具有同样 λ 的方程 (9) 的任何两个解 $\psi^{(1,2)}$ 来说，表达式

$$W(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = \sqrt{c_n}\,(\psi_n^{(1)}\psi_{n-1}^{(2)} - \psi_{n-1}^{(1)}\psi_n^{(2)}) \tag{13}$$

与号码 n 无关. 在我们的理论中,形式 W 起朗斯基作用;特别是，如果 $W(\psi^{(1)}, \psi^{(2)}) = 0$，那么解 $\psi^{(1)}$ 和 $\psi^{(2)}$ 是线性相关

1) 我们提醒一下,所引入的函数，作为实数方程的解(其渐近形式由 z 的实函数给出),它们满足关系 $\bar{\varphi}_n(z) = \varphi_n(\bar{z})$, $\bar{\psi}_n(z) = \psi_n(\bar{z})$ 等等.

的．当上式取连续极限时，W直接变成朗斯基行列式．计算朗斯基 $W(\varphi(z),\ \psi(z))$：

$$W(\varphi,\ \psi)=\alpha(z)W(\bar{\Phi},\ \psi)\overset{n\to\infty}{=}\alpha(z)(z^{-1}-z),$$

我们求出

$$\alpha(z)=-\frac{W(\varphi(z),\ \psi(z))}{z-z^{-1}}. \tag{14a}$$

这个公式指出，当 $|z|<1$ 时，$\alpha(z)$ 是解析的．用类似的方法计算 $W(\varphi,\ \bar{\varphi})$，我们求出：

$$|\alpha(z)|^2-|\beta(z)|^2=1,\quad |z|=1. \tag{14b}$$

实轴点z_n，$0<|z_n|<1$，$n=1, 2, \cdots, N$，(在这些点上 $\alpha(z_n)=0$) 同算子L的分立谱本征值：$\lambda_n=z_n+z_n^{-1}$，$\mathrm{Im}z_n=0$，是相互单值对应的．在这些点上

$$\varphi_n(z_k)=b_k\psi_n(z_k),\quad \mathrm{Im}b_k=0, \tag{15}$$

即 $\varphi_n(z_k)$ 是算子L之分立谱的本征函数．

集合

$$S=(r(z),\ z_n,\ b_n,\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

(其中 $r(z)=\beta(z)\alpha^{-1}(z)$，$|z|=1$，) 为了同薛定谔算子理论相类比，我们把它叫做算子L的散射数据．算子 $L(2)$ 是算子 (6) 的特殊情形．假定 (9) 中 $v_n=0$，容易看出，这时对任何一个 n 来说，$\varphi_n(-z)=(-1)^n\varphi_n(z)$，$\psi_n(-z)=(-1)^n\psi_n(z)$，因此，对于算子 $L(2)$ 来说，

$$\alpha(-z)=\alpha(z),\ \beta(-z)=\beta(z),\ |z|=1.$$

因此，算子 (2) 所分离出来的散射数据中，$r(-z)=r(z)$，$|z|=1$；同时点 z_n 所构成的集合相对 $z=0$ 是对称的；归一化因子 b_n 在对称点上相等．

散射数据随时间的演化借助于系统 (5) 的动力学由下面方程确定：

$$\frac{\partial \varphi_n(z)}{\partial t} + (A\varphi)_n = \frac{1}{2}(z - z^{-1})\varphi_n(z),$$

式中右边是这样选择的,使得当 $n \to -\infty$ 时, $\varphi_n(z)$ 的渐近值与时间无关; 算子 A 由矩阵 (7) 给出. 把表达式 (12), (15) 代入到上式,求出

$$\begin{aligned} r(z, t) &= r(z, 0)\exp[(z - z^{-1})t], \\ b_n(t) &= b_n(0)\exp[(z_n - z_n^{-1})t]. \end{aligned} \tag{16}$$

当然,本征值 (z_n) 与时间无关.

如果算子 (2) 的系数满足方程 (1), 那么用类似的方法求出散射数据对时间的依赖关系:

$$\begin{aligned} r(z,t) &= r(z,0)\exp[(z^2 - z^{-2})t], \\ b_n(t) &= b_n(0)\exp[(z_n^2 - z_n^{-2})t]. \end{aligned} \tag{17}$$

现在着手研究散射的逆问题,为此我们引入表示:

$$\begin{aligned} \varphi_n(z) &= z^{-n} \prod_{k=n+1}^{\infty} c_k^{-1/2}\theta_n(z), \\ \tilde{\psi}_n(z) &= z^{-n} \prod_{k=n+1}^{\infty} c_k^{-1/2}\tilde{x}_n(z), \\ \psi_n(z) &= z^{n} \prod_{k=n+1}^{\infty} c_k^{-1/2}x_n(z). \end{aligned} \tag{18}$$

由于 (11), 按上式我们有

$$\tilde{x}_n(z) = x_n(z^{-1}). \tag{19}$$

相应单位圆内部与外部, 函数 $\theta_n(z)$ 与 $\tilde{x}_n(z)$ 是解析的并满足方程

$$z\theta_{n-1} + z^{-1}c_{n+1}\theta_{n+1} + v_n\theta_n = (z + z^{-1})\theta_n \tag{20}$$

($\tilde{x}_n$ 也满足这样的方程).

当 $z \to 0$ 时,从 (20) 得到

$$c_n = \frac{\theta_{n-1}(\theta)}{\theta_n(0)}; \tag{21}$$

当 $|z|\to\infty$ 时，$\tilde{\chi}_n(z)$ 有渐近展式

$$\tilde{\chi}_n(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{\chi}_n^{(k)}}{z^k}.$$

将此展式代入到 (20)，我们求出

$$v_n=\tilde{\chi}_n^{(1)}-\tilde{\chi}_{n-1}^{(1)}. \tag{22}$$

现在我们用 (18) 式的表示把关系式 (12) 写成：

$$\frac{\theta_n(z)}{\alpha(z)}=\tilde{\chi}_n(z)+z^{2n}r(z)\chi_n(z),\ |z|=1. \tag{23}$$

重复相应 §1 的讨论，在研究中我们引入分片解析函数 $\Phi_n(z)$：

$$\Phi_n(z)=\begin{cases}\theta_n(z)\alpha^{-1}(z), & |z|<1,\\ \tilde{\chi}_n(z), & |z|>1.\end{cases}$$

此函数在单位圆内的点 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_N$ 上有简单极点，$\alpha(z)$ 在这些点上等于零．根据 (15)，(18)，(19) $\Phi_n(z)$ 在点 z_k 上的留数等于

$$\frac{z_k^{2n}b_k}{\alpha'(z_k)}\tilde{\chi}_n(z_k^{-1}).$$

从 (23) 看到，函数 $\Phi_n(z)$ 在单位圆周上的跃度等于

$$z^{2n}r(z)\chi_n(z).$$

最后，当 $|z|\to\infty$ 时，函数 $\Phi_n(z)\to 1$。

这些特征单值地确定出 $\Phi_n(z)$：

$$\Phi_n(z)=1+\sum_{k=1}^{N}\frac{z_k^{2n}b_k\tilde{\chi}_n(z_k^{-1})}{\alpha'(z_k)(z-z_k)}-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z'|=1}\frac{z'^{2n}r(z')\chi_n(z')}{z'-z}dz', \tag{24}$$

(24) 中的积分沿单位圆周正向进行(逆时针方向)． 用函数 $\chi_n(z),|z|=1$ 及量值 $\tilde{\chi}_n(z_k^{-1})$ (为简单起见用 $\Gamma_n^{(k)}$ 表示它们)能把公式 (24) 写成封闭性方程组．当点 z 从外面趋于单位圆周时，从 (24) 我们得到

$$\tilde{\chi}_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{z_k^{2n}\Gamma_n^{(k)} b_k}{\alpha'(z_k)(z - z_k)} + \frac{1}{2} z^{2n} r(z) \chi_n(z)$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z'^{2n} r(z') \chi_n(z') dz'}{z' - z}. \tag{25}$$

其次，在 (24) 中令 $z = z_k^{-1}$，我们得到N个 $\Gamma_n^{(k)}$ 的方程：

$$\Gamma_n^{(k)} = 1 + \sum_{m=1}^{N} \frac{z_m^{2n} b_m \Gamma_n^{(m)}}{\alpha'(z_m)(z_k^{-1} - z_m)}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{z^{2n} r(z) \chi_n(z) dz}{z - z_k^{-1}}.$$

$$k = 1, 2, \cdots, N. \tag{26}$$

量 c_n，v_n 通过方程组 (25)，(26) 的解用公式 (21)，(22) 来确定，在 (21)，(22) 中应假定

$$\frac{\theta_n(0)}{\alpha(0)} = 1 - \sum_{m=1}^{N} z_m^{2n-1} b_m \alpha'^{-1}(z_m) \Gamma_n^{(m)}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int z^{2n-1} r(z) \chi_n(z) dz,$$

$$\tag{27}$$

$$\tilde{\chi}_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{N} z_m^{2n} b_m \alpha'^{-1}(z_m) \Gamma_n^{(m)}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int z^{2n} r(z) \chi_n(z) dz.$$

不难验证，在上面对于属于算子 $L(2)$之散射数据所指出的那些限制条件下，函数 $\tilde{\chi}_n^{(1)}$ 自然而然等于零，从而保证了 $v_n=0$.

正像薛定谔算子那样，当系数 $r(z)$ 恒等于零时，逆问题方程 (25)，(26) 很容易解．在这种情况下，c_n，v_n 仅仅由分立谱的特征确定．在圆周 $|z| = 1$ 上，当 $\beta(z) = 0$ 时，从公式 (14b) 得到：

$$|\alpha(z)|^2 = 1.$$

在这种情形中，$\alpha(z)$ 唯一地由它自己的零点 z_i，$i = 1$，

$2, \cdots, N$，及 $\alpha(0) > 0$ 的条件所确定．后一条件与 $\beta(z) = 0$ 情形无关，它是普遍的条件．它是直接从 (14a) 和 (18) 得出的下一公式

$$\alpha(0) = \prod_{-\infty}^{\infty} c_n^{-1/2} > 0$$

的结果．

当 $\beta = 0$ 时，

$$\alpha(z) = \mathrm{sign}\left(\prod z_i\right) \prod \frac{z - z_i}{z z_i - 1}.$$

归一化因子 b_i 的正负号应符合于下面公式所给出的条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n^2(z_i) = -z_i \alpha(z_i) b_i. \tag{28}$$

得出此公式的想法同 (1.15) 一样．对于 b_i 的其它方面可以任意选择．

下面让我们研究最简单的情形，即当 $\alpha(z)$ 在单位圆内只有一个零点 $z = z_1 = x$ 的情形．在这种情形中，代数方程组 (26) 只有一个方程 $\Gamma_n^{(1)} = \Gamma_n$：

$$\Gamma_n = 1 - c x^{2n} \Gamma_n,$$

式中 c 表示量

$$c = -\frac{b}{\alpha'(x)(x^{-1} - x)},$$

由于 (28)，此量为正．用 (27) 算出 $\theta_n(0)$，$\tilde{\chi}_n^{(1)}$，我们求得

$$\frac{\theta_n(0)}{\alpha(0)} = 1 + (x^{-2} - 1) \frac{c x^{2n}}{1 + c x^{2n}},$$

$$\chi_n^{(1)} = -(x^{-1} - x) \frac{c x^{2n}}{1 + c x^{2n}}.$$

引入表示

$$n_0 = \left(\ln \frac{1}{x^2}\right)^{-1} \ln c.$$

由于 (16)，n_0 是时间的线性函数：

$$n_0(t) = n_0(0) - \left(\ln \frac{1}{x^2}\right)^{-1} (x^{-1} - x)t.$$

利用 (21)，我们求出点阵粒子的位移 $x_n(t)$：

$$\begin{aligned} x_n(t) &= -\ln\theta_n(0) + \text{const} \\ &= -\ln\left[1 + (x^{-2} - 1)\frac{x^{2(n-n_0(t))}}{1 + x^{2(n-n_0(t))}}\right]. \end{aligned} \tag{29}$$

由此可见，解 (29) 乃是以恒定速度运动着的点阵形变，并且形变的形状不随时间而变．这样的解我们将叫做孤子．孤子的速度是 $\alpha(z)$ 的零点位置的函数，

$$v = -\left(\ln \frac{1}{x^2}\right)(x^{-1} - x),$$

并且当 $x < 0$ 时，v 为正，而当 $x > 0$ 时，v 为负．（注意，$|x| < 1$.）容易看出，$|v| > 1$.

在一般情况下，$\alpha(z)$ 有 N 个零点，这时当 $r(z) = 0$ 时，逆问题方程组 (25)，(26) 同单个孤子情形一样，简化为量 $\Gamma_n^{(k)}(k = 1, 2, \cdots, N)$ 的 N 个线性代数方程组，从而总是可以解出来．正像 KdV 方程一样，方程 (4) 所对应的这种解是 N 个孤子，即描述孤子碰撞过程．研究这些问题，不但作法可同 KdV 理论完全一样，而且结论也是一样的．孤子的速度碰撞前和碰撞后是一样的，受到改变的仅仅是孤子的位相 ($n_0(0)$)，并且在孤子碰撞中没有"多粒子"效应．

求朗谬链 (1) 的孤子解同样是简单的．对于这种情况，由于奇偶性，$\alpha(z)$ 在单位圆内部有偶数个零点，其中如果 $\alpha(z_i) = 0$，那么 $\alpha(-z_i) = 0$．在最简单的情形中 ($\gamma(z)$

$=0)\ \alpha(z)$ 存在两个零点：$z_1=x>0$，$z_2=-x$． 我们表示

$$\frac{z_1 b_1}{\alpha'(z_1)}=-c=\frac{z_2 b_2}{\alpha'(z_2)};$$

由于 (28)$c>0$．假定 $\Gamma_n^{(1)}=\Gamma_n^{(2)}=\Gamma_n$ 并解方程 (26)，我们求出

$$\Gamma_n=\left(1+2c\,\frac{x^{2n}}{x^{-2}-x^2}\right)^{-1},\quad 0<x<1.$$

公式 (27)，(21) 给出方程组 (1) 的解 $c_n(t)$.同时应回忆到，由于 (17)

$$c(t)=c(0)\exp[(x^2-x^{-2})t],$$

$$c_n(t)=\frac{1+2cx^{2n-4}\Gamma_{n-1}}{1+2cx^{2n-2}\Gamma_n}.$$

因此，(30) 乃是以速度

$$v=-(\ln x^{-2})^{-1}(x^{-2}-x^2)$$

运动着的孤子．显然，对任何 x，速度 $v(x)<-1$．当 $x\to 1$ 时，正是所料到的那样，解 (30) 变成 KdV 孤子．朗谬链的多个孤子解同 KdV N 个孤子解行为是一样的．

在结束这节时，我们证明周期性 Toda 链的完全可积性．这样的链可以想像成在一个圆周上用“小弹簧”连结起来的 N 个粒子系统． 对于无限方程组 (5) 来说，标出这样的系统等价于加上周期性条件：

$$v_{n+N}=v_n,\quad c_{n+N}=c_n.$$

当假定 $\psi_{n+N}=\psi_N$ 时，我们也将在周期性函数类中研究本征值问题 (9)．同时无限矩阵 (6) 简化成具有 N 个独立本征值的 $N\times N$ 对称矩阵．这个矩阵有下面形式

$$L=\left\|\begin{array}{ccccccc}
v_1 & \sqrt{c_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{c_1}\\
\sqrt{c_2} & v_2 & \sqrt{c_3} & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & \sqrt{c_3} & v_3 & \sqrt{c_4} & \cdots & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & \cdots\sqrt{c_{N-1}} & & v_{N-1} & \sqrt{c_N}\\
\sqrt{c_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{c_N} & v_N
\end{array}\right\|,$$

而此矩阵的本征值 λ_i, $i=1, 2, \cdots, N$, 满足特征方程

$$\det\|L-\lambda I\|=0$$

式中 I 为单位矩阵.

我们证明,全部本征值 λ_i 都处于对合 (involution) 之中,即任何一对 λ_i, λ_j 的泊松括号都等于零 (L 的本征值相互对易). 系统 (4) 是哈密顿系统. 它的哈密顿量为

$$H=\sum_n\left(\frac{v_n^2}{2}+e^{x_{n+1}-x_n}\right),$$

而 v_n, x_n 是正则共轭变量. 这些变量的泊松括号有通常的形式:

$$\{S, T\}=\sum_n\left(\frac{\partial S}{\partial x_n}\frac{\partial T}{\partial v_n}-\frac{\partial S}{\partial v_n}\frac{\partial T}{\partial x_n}\right).$$

采用变量 c_n, v_n, $\{S, T\}$ 写成下面形式:

$$\{S, T\}=\sum_n\left[c_n\left(\frac{\partial S}{\partial c_n}\frac{\partial T}{\partial v_n}-\frac{\partial S}{\partial v_n}\frac{\partial T}{\partial c_n}\right)\right.$$
$$\left.-c_{n+1}\left(\frac{\partial S}{\partial c_{n+1}}\frac{\partial T}{\partial v_n}-\frac{\partial S}{\partial v_n}\frac{\partial T}{\partial c_{n+1}}\right)\right].$$

现在我们计算导数 $\partial\lambda_i/\partial c_n$, $\partial\lambda_i/\partial v_n$. 为此,当算子有很小的变化时, 我们利用已知的微扰理论公式来确定其本征值的改变量:

$$\delta\lambda=\langle\psi|\delta L|\psi\rangle.$$

式中 ψ 是算子 L 的归一化本征向量. 我们有

$$\frac{\delta\lambda_j}{\delta c_n}=\frac{1}{\sqrt{c_n}}\psi_n(j)\psi_{n-1}(j),\quad \frac{\partial\lambda_j}{\partial v_n}=\psi_n^2(j),$$

式中 $\psi(j)$ 是 L 的本征函数,其本征值 $\lambda=\lambda_j$.

现在我们注意到,对于算子 L 的任何两个本征函数来说,直接从 (9) 得出的以下关系式是正确的:

$$\begin{aligned}&(\lambda_i-\lambda_j)\psi_n(j)\psi_n(i)\\&\quad=W_n(\psi(j),\psi(i))-W_{n+1}(\psi(j),\psi(i)),\end{aligned}$$

式中 W 由公式 (13) 给出.

利用曾引用过的表达式,不难证明

$$\begin{aligned}\{\lambda_i,\lambda_j\}&=\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\sum_{n=1}^{N}[W_{n+1}^2(\psi(i),\psi(j))\\&\qquad-W_n^2(\psi(i),\psi(j))]\\&=\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}[W_{N+1}^2(\psi(i),\psi(j))\\&\qquad-W_1^2(\psi(i),\psi(j))].\end{aligned}$$

当加上周期性边界条件时,此表达式等于零,即

$$\{\lambda_i,\lambda_j\}=0.$$

由于 Lax 表象,所以本征值 λ_i 是运动积分. 这样,我们便证明了具有 N 个自由度的哈密顿系统 (4) 存在 N 个独立的彼此相互对易的运动积分. 由于熟知的刘维定理(例如,参看 [20]) 这表示所考虑的系统是完全可积的.

我们还要提醒一下,Toda 链的哈密顿量用矩阵 L 平方的迹来表示:

$$H=\frac{1}{2}\mathrm{Sp}L^2=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n^2.$$

根据同样的刘维定理,量 λ_i 可选作系统 (4) 的正则作用. 而上式表明了用这种变量所表示的哈密顿量. 现在我们注意到

以下情况：L 的所有本征值都对易这一事实，同系统（4）的具体形式毫无关系．因此我们可以断定，能表示成下面形式的任何系统都是完全可积的：

$$\dot{x}_n = \frac{\partial H}{\partial v_n}, \quad \dot{v}_n = -\frac{\partial H}{\partial x_n},$$

式中哈密顿量 H 为矩阵 L 的不变量的任意函数；L 的不变量可表示为：$I_n(x, v) = \mathrm{Sp}L^n$，这就是说，$H = f(I_1, I_2, \cdots, I_N)$ 及 $I_n(n = 1, \cdots, N)$ 是正则作用．

§8. 非线性薛定谔方程和 sin-Gordon 方程

在本章前几节所发展的 KdV 方程理论，曾依靠了 KdV 方程的 Lax 表象 $\dot{L} = [L, A]$．现在我们要指出 KdV 方程的另外一种对易表象，我们将看到，从这种表象出发，有可能把这种变形的理论适当地推广到另外一些演化方程中去．

在积分 KdV 方程时，下面的二阶常微分方程，即薛定谔方程起着基本作用：

$$\psi_{xx} - u\psi = -k^2\psi. \tag{1}$$

曾指出过，如果此方程的势按 KdV 随时间改变，那么 ψ 还应满足另外一个线性方程，也即

$$\psi_t = -4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3u_x\psi. \tag{2}$$

一般情况下，ψ 的上两个微分方程是超定的．这两个方程对于所有 k^2 的相容条件不是别的，而是要求 $u(x, t)$ 满足 KdV 方程：

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{3}$$

为了证明（3）乃是（1）和（2）的相容条件，采用下面方法是方便的．我们先把二阶方程（1）化成两个一阶方程组，为此，引入一个新的未知函数 ψ_1，使得

$$\psi_x = ik\psi + \psi_1. \tag{4}$$

于是，从 (1) 我们有

$$\psi_{1x} = -ik\psi_1 + u\psi. \tag{5}$$

显然，系统 (4), (5) 恒等于 (1). 用 (4), (5) 可以消去方程 (2) 的所有 ψ 对于 x 的导数项，因而我们得到

$$\psi_t = 4ik^3\psi + 4k^2\psi_1 + 2iku\psi - u_x\psi + 2u\psi_1. \tag{6}$$

利用 (4) 和 (5)，从方程 (6) 可得到 ψ_1 的类似方程：

$$\begin{aligned}\psi_{1t} = &-4ik^3\psi_1 + 4k^2u\psi + 2iku_x\psi \\ &- 2iku\psi_1 + (2u^2 - u_{xx})\psi + u_x\psi_1.\end{aligned} \tag{7}$$

将 ψ 和 ψ_1 组成列 $\begin{pmatrix}\psi \\ \psi_1\end{pmatrix} = \varphi$，利用与参数 λ 有关的矩阵 U 和 V，可将 (4), (5) 和 (6), (7) 写成更紧凑的形式：

$$\varphi_x = U(\lambda)\varphi, \tag{8}$$

$$\varphi_t = V(\lambda)\varphi, \tag{9}$$

式中

$$U(\lambda) = i\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1 \\ u & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}V(\lambda) = 4i\lambda^3\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} + 4\lambda^2\begin{pmatrix}0 & 1 \\ u & 0\end{pmatrix} + 2i\lambda\begin{pmatrix}u & 0 \\ u_x & -u\end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix}-u_x & 2u \\ 2u^2 - u_{xx} & u_x\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{10}$$

矩阵 U, V 对于 x、t 的依赖关系是通过函数 $u(x, t)$.

向量 φ 的方程组 (8), (9) 是超定的. (8) 对 t 微商，(9) 对 x 微商，并使两个结果相等，便得到 (8), (9) 的相容条件：

$$\frac{\partial U(\lambda)}{\partial t} - \frac{\partial V(\lambda)}{\partial x} + [U(\lambda), V(\lambda)] = 0. \tag{11}$$

矩阵 U 和 V 依赖于任意复参数 λ（在所研究的情形中，U 和 V 皆为 λ 的多项式），因此 (11) 的等号左边也是 λ 的多项式. 由于(11)对所有 λ 都应成立，所以该多项式的系数应等于零.

将 (10) 代入到 (11)，我们发现，除了一个自由项外，所给出的矩阵 U、V 的结构 (10) 确保了该多项式所有系数都等于零，从而 (11) 的左边为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_t - 6uu_x - u_{xxx} & 0 \end{pmatrix}.$$

要求此矩阵等于零表明 $u(x, t)$ 满足 KdV 方程. 这样一来，(11) 便是 KdV 方程的新的对易表象. 这种表象在研究周期性解的理论中起着重要作用.（参着第二章 §3，那里 $U = Q$，$V = \Lambda$).

KdV 的对易表象 (11) 暗示着把 KdV 这一理论推广到其它一些演化方程的一种途径，即可积方程应该用方程 (8)、(9) 的相容性条件来表示，其中 (8)、(9) 所具有的矩阵 U 和 V，一方面是谱参数 λ 的有理函数，另一方面 U、V 的系数还包含所研究方程的解. 至于 U、V 的任意矩阵维数所出现的结构以及 U 对 λ 的普遍依赖关系，我们推迟到第三章再研究. 这里我们只限于讨论 U、V 是 2×2 矩阵及 U 是 λ 的线性函数的情况. 从 (10) 可以看出，这种情形乃是 KdV 的自然的（和最低限度的）推广，从而只要求作不大的理论修正. 我们将认为，$U(x, t; \lambda)$ 有下面形式:

$$U = i\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

一般来说，式中 q, r 为 x, t 的复值函数. 而矩阵 $V(\lambda)$，我们将从下面条件来选，即，使 (11) 能化成 q, r 的某些偏微分方程. 甚至这种最低限度的推广，也包含了相当丰富的内容.

当 V 选作

$$V = 2i\lambda^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2i\lambda\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q_x \\ -r_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$-i\begin{pmatrix} rq & 0 \\ 0 & -rq \end{pmatrix}, \tag{13}$$

便可证实，(11) 等价于方程组

$$ir_t + r_{xx} + 2qr^2 = 0$$
$$iq_t - q_{xx} - 2rq^2 = 0$$

假定 $r = \bar{q}$ 或者 $r = -\bar{q}$，我们得到

$$ir_t + r_{xx} + 2|r|^2 r = 0 \quad (r = \bar{q}), \tag{14a}$$
$$ir_t + r_{xx} - 2|r|^2 r = 0 \quad (r = -\bar{q}). \tag{14b}$$

我们将称方程 (14) 为非线性薛定谔方程.

把 V 选作下面矩阵之后

$$V = -4i\lambda^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 4i\lambda^2\begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + 2\lambda\begin{pmatrix} qr & -iq_x \\ ir_x & -qr \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} qr_x - rq_x & iq_{xx} + 2iq^2 r \\ ir_{xx} + 2ir^2 q & -qr_x + rq_x \end{pmatrix}, \tag{15}$$

得到方程

$$\begin{aligned} q_t + q_{xxx} + 6rqq_x = 0, \\ r_t + r_{xxx} + 6qrr_x = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

我们将认为 q 和 r 是实的. KdV 方程是 (16) 取 $r = -1$ 的特殊情形. 再假定 $r = q$ 或者 $r = -q$，我们得到

$$r_t + r_{xxx} + 6r^2 r_x = 0 \quad (r = q), \tag{17a}$$
$$r_t + r_{xxx} - 6r^2 r_x = 0 \quad (r = -q), \tag{17b}$$

这就是所谓变形的 KdV (MKdV) 或者叫具有立方非线性的 KdV. 如果 $q = -1 + \alpha r$，那么

$$r_t + r_{xxx} - 6rr_x + 6\alpha r^2 r_x = 0.$$

因此，逆问题方法对这样的方程也是有效的.

我们现在假定 $r = q = u_x/2$ 并考虑矩阵

$$V = \frac{1}{4i\lambda}\begin{pmatrix} \cos u & -i\sin u \\ i\sin u & -\cos u \end{pmatrix}. \tag{18}$$

从 (11) 对 u 我们有

$$u_{xt} = \sin u (r = q = u_x/2), \tag{19a}$$

此即 sin-Gordon 方程.

再假定 $r = -q = -u_x/2$ 及

$$V = \frac{1}{4i\lambda}\begin{pmatrix} \mathrm{ch} u & -i\mathrm{sh} u \\ -i\mathrm{sh} u & -\mathrm{ch} u \end{pmatrix},$$

我们求出

$$u_{xt} = \mathrm{sh} u, \tag{19b}$$

此即 sin-Gordon 方程.

上面所列举的全部方程都与问题 (8) 有关，其中 (8) 中的矩阵 $U(\lambda)$ 为 (12) 式. 因此我们最感兴趣的问题是研究与方程组 (8) 有关的散射正问题和逆问题，以及用相应的方法算出所定义的散射数据对时间的依赖关系. 所有这一切，我们在下一节再来作.

§ 9. 两个微分方程系统的逆散射问题

让我们来研究两个复函数 $\phi^{(1)}$, $\phi^{(2)}$ 的微分方程组:

$$\begin{aligned} \phi_x^{(1)} &= i\lambda\phi^{(1)} + iq(x)\phi^{(2)}, \\ \phi_x^{(2)} &= -i\lambda\phi^{(2)} + ir(x)\phi^{(1)}. \end{aligned} \tag{1}$$

我们要求复函数 $r(x)$, $q(x)$ 满足下面条件:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(x)|dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |q(x)|dx < \infty. \tag{2}$$

对于每一个实的 λ，方程组 (1) 有两个线性独立解. 正像研究薛定谔算子的逆问题那样 (§ 1)，我们在解的空间中考虑两个基底. 其中一个基底将由这样的一对函数组成，即它们是由 $x \to +\infty$ 时的渐近形式来确定的，另一个由 $x \to -\infty$ 时的渐近形式确定.

于是，设 $\phi_1(x, \lambda)$, $\phi_2(x, \lambda)$ 为 (1) 的解，它们由下面的

渐近条件来确定:

$$\begin{aligned}\psi_1(x,\lambda)&=\begin{pmatrix}e^{i\lambda x}\\0\end{pmatrix}+O(1),\\ \psi_2(x,\lambda)&=\begin{pmatrix}0\\e^{-i\lambda x}\end{pmatrix}+O(1);\end{aligned}\qquad x\to+\infty,$$

而解 $\varphi_1(x,\lambda)$, $\varphi_2(x,\lambda)$ 由下面渐近式所确定:

$$\varphi_1(x,\lambda)=\begin{pmatrix}e^{i\lambda x}\\0\end{pmatrix},$$

$$\varphi_2(x,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\e^{-i\lambda x}\end{pmatrix},\qquad x\to-\infty.$$

因向量 ψ_1, ψ_2 构成一个基底,所以

$$\varphi_i(x,\lambda)=\sum_{k=1,2}T_{ki}(\lambda)\psi_k(x,\lambda).\tag{3}$$

这样一来,我们仍把这里所定义的矩阵 $T(\lambda)$ 称为跃迁矩阵;显然, $T(\lambda)$ 是幺模的:

$$\det T(\lambda)=1,\tag{4}$$

这是因为方程组 (1) 的具有相同 λ 的任何一对解 χ_1, χ_2 的朗斯基行列式

$$W(\chi_1,\chi_2)=\det\begin{vmatrix}\chi_1^{(1)}&\chi_2^{(1)}\\\chi_1^{(2)}&\chi_2^{(2)}\end{vmatrix}$$

是与 x 无关的.

算出 $W(\varphi_1,\psi_2)$, $W(\varphi_2,\psi_1)$, 我们求出

$$\begin{aligned}T_{11}(\lambda)&=W(\varphi_1(x,\lambda),\ \psi_2(x,\lambda)),\\ T_{22}(\lambda)&=-W(\varphi_2(x,\lambda),\ \psi_1(x,\lambda)).\end{aligned}\tag{5}$$

同在 §1 一样,我们可以证明,解 $\psi_1(x,\lambda)$, $\varphi_2(x,\lambda)$ 允许解析延拓到 λ 的上半平面,而 $\psi_2(x,\lambda)$, $\varphi_1(x,\lambda)$ 在 λ 的下半平面是解析的. 并且

$$\psi_1(x,\lambda)e^{-i\lambda x}\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \varphi_2(x,\lambda)e^{i\lambda x}\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

$$|\lambda|\to\infty,\qquad \mathrm{Im}\lambda\geqslant 0;$$

$$\psi_2(x,\lambda)e^{i\lambda x}\to\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \varphi_1(x,\lambda)e^{-i\lambda x}\to\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$|\lambda|\to\infty,\qquad \mathrm{Im}\lambda<0.$$

现在从 (5) 得到，$T_{11}(\lambda)$ 在下半平面是解析的，而 $T_{22}(\lambda)$ 在上半平面解析，同时，当 $|\lambda|\to\infty$ 时，这两个函数趋于 1.

一般来说，当 λ 为复值时，方程组 (1) 可能有下面特性的解，这种解无论 $x\to\infty$，还是 $x\to-\infty$ 都是衰减的(当满足 (2) 时，成指数地衰减). 这样的谱参数值 λ 我们将称为分立谱的点. 如果 $\mathrm{Im}\lambda>0$，那么容易看出，分立谱同函数 $T_{22}(\lambda)$ 的零点集合相同，而处于 λ 下半平面的分立谱的点同 $T_{11}(\lambda)$ 的零点相同. 在分立谱的点上

$$\varphi_1(x,\lambda_n)=C_n\psi_2(x,\lambda_n)\ \ (T_{11}(\lambda_n)=0,\ \mathrm{Im}\lambda_n<0);$$

$$\varphi_2(x,\lambda_n)=b_n\psi_1(x,\lambda_n)\ \ (T_{22}(\lambda_n)=0,\ \mathrm{Im}\lambda_n>0).$$

不失一般性，下面我们将认为 T_{11} 和 T_{22} 的零点是简单的，

我们一旦建立解的解析性质和写出分立谱之后，就可以立即得到逆问题方程组，这完全类似于在 § 1 或在 § 7 曾作过的那样，把逆问题转化成解析函数的共轭问题. 正因为这样，我们下面没有一一都作，只限于作 $r(x)$ 和 $q(x)$ 之间关系的特殊情形：$r=\bar{q}$ 或 $r=-\bar{q}$，这种情形是我们感兴趣的.

如果在系统 (1) 中假定

$$r=\bar{q}, \tag{a}$$

那么，在方程 (1) 的解中出现对合，即，如果 $\psi=\begin{pmatrix}\psi^{(1)}\\\psi^{(2)}\end{pmatrix}$ 是 λ 为实的系统 (1) 的解，那么

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} -\bar{\psi}^{(2)} \\ \bar{\psi}^{(1)} \end{pmatrix} \tag{6a}$$

也是具有同样 λ 的系统 (1) 的解. 由于存在对合，显然，知道任何一个解便能求出与其线性无关的另一个解. 在简化条件 (a) 下

$$\psi_2(x, \lambda) = \tilde{\psi}_1(x, \lambda), \quad \varphi_1(x, \lambda) = -\tilde{\varphi}_2(x, \lambda).$$

同时从 (3) 得到

$$T_{11}(\lambda) = \overline{T}_{22}(\lambda), \quad T_{12}(\lambda) = -\overline{T}_{21}(\lambda) \ (\mathrm{Im}\lambda = 0),$$

即矩阵 T 有下面形式:

$$T = \begin{pmatrix} \bar{a}(\lambda) & b(\lambda) \\ -\bar{b}(\lambda) & a(\lambda) \end{pmatrix}.$$

由于 (4)

$$|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1. \tag{7a}$$

而如果在系统 (1) 中

$$r(x) = -\bar{q}(x), \tag{b}$$

那么同 $\psi = \begin{pmatrix} \psi^{(1)} \\ \psi^{(2)} \end{pmatrix}$ 一起构成系统 (1) 的解便是下面的列:

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{(2)} \\ \bar{\psi}^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{6b}$$

在这种情形下，$\psi_2(x, \lambda) = \tilde{\psi}_1(x, \lambda)$, $\varphi_1(x, \lambda) = \tilde{\varphi}_2(x, \lambda)$, 而矩阵 $T(\lambda)$ 可表示为

$$T = \begin{pmatrix} \bar{a}(\lambda) & b(\lambda) \\ \bar{b}(\lambda) & a(\lambda) \end{pmatrix},$$

因此

$$|a(\lambda)|^2 - |b(\lambda)|^2 = 1 \tag{7b}$$

现在我们记作 $\varphi(x, \lambda) = \varphi_2(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda) = \psi_1(x, \lambda)$. 在简化 (a), (b) 的任何情况中，从 (3) 我们有

$$\varphi(x, \lambda) = a(\lambda)\tilde{\psi}(x, \lambda) + b(\lambda)\psi(x, \lambda),$$

所以

$$a(\lambda)=-W(\varphi(x,\lambda),\ \psi(x,\lambda)).\tag{8}$$

函数 $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$, $a(\lambda)$ 在 λ 上半平面是解析的. 在 $a(\lambda)$ 的零点处

$$\varphi(x,\lambda_n)=b_n\psi(x,\lambda_n),\ n=1,2,\cdots,N.\tag{9}$$

但,要注意到,在简化 (b) 下,问题 (1) 是自共轭的;所以这种情形没有分立谱.

下面我们转到逆问题上,要考虑函数

$$\Phi(x,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\psi(x,\lambda)}{a(\lambda)}e^{i\lambda x}, & \mathrm{Im}\lambda>0,\\ \tilde{\psi}(x,\bar{\lambda})e^{i\lambda x}, & \mathrm{Im}\lambda<0.\end{cases}$$

由于 (8), (9) $\Phi(x,\lambda)$ 存在下面形式的表示:

$$\Phi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n\psi(x,\lambda_n)e^{i\lambda_n x}}{a'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda')\psi(x,\lambda')e^{i\lambda' x}d\lambda'}{\lambda'-\lambda},\tag{10}$$

式中用 $r(\lambda)$ 表示“反射系数” $r(\lambda)=b(\lambda)/a(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$. 同在 § 1, § 7 中作法一样, 从表示 (10) 中求出 $\psi(x,\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ 及 $\psi(x,\lambda_n)$ $(n=1,\cdots,N)$ 的封闭方程组

$$\bar{\psi}(x,\lambda)e^{i\lambda x}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n\psi(x,\lambda_n)e^{i\lambda_n x}}{(\lambda-\lambda_n)a'(\lambda_n)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda')\psi(x,\lambda')e^{i\lambda' x}d\lambda'}{\lambda'-\lambda+i0},\tag{11}$$

$$\tilde{\psi}(x,\lambda_n)e^{i\bar{\lambda}_n x}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\sum_{m=1}^{N}\frac{b_m\psi(x,\lambda_m)e^{i\lambda_m x}}{(\lambda_n-\lambda_m)a'(\lambda_m)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda)\psi(x,\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda}{\lambda-\lambda_n}.\tag{12}$$

方程 (11), (12) 同 (a) 或 (b) 所定义的对合运算一起构成逆问题的完备方程组.

其次,从方程 (1) 算出函数 $\psi(x, \lambda)e^{i\lambda x}$ 按 $1/\lambda$ 幂次的渐近展开的系数,求得:

$$\tilde{\psi}(x, \lambda)e^{i\lambda x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} -q(x)/2 \\ \frac{i}{2}\int_x^\infty r(x)q(x)dx \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

从 (10) 确定同样的量, 我们便得到直接用方程 (11), (12) 的解所表示的"势" $q(x)$ 的公式:

$$q(x) = -2\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{a'(\lambda_n)}\psi^{(1)}(x, \lambda_n)e^{i\lambda_n x} + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda)\psi^{(1)}(x, \lambda)e^{i\lambda x}d\lambda, \tag{13}$$

$$\int_x^\infty r(x')q(x')dx' = -2i\sum_{n=1}^{N}\frac{b_n}{a'(\lambda_n)}\psi^{(2)}(x, \lambda_n)e^{i\lambda_n x} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(\lambda)\psi^{(2)}(x, \lambda)e^{i\lambda x}d\lambda.$$

在 sin-Gordon 方程情况下, 方程 (1) 的势除条件 (a) 外, 还得满足一个附加条件——势是实的:

$$q(x) = \bar{q}(x) = r(x). \tag{14}$$

同时,容易看出, 当 λ 取相反符号时, 系统 (1) 的解之间出现了联系. 即,如果 $\psi = \begin{pmatrix} \psi^{(1)}(\lambda') \\ \psi^{(2)}(\lambda') \end{pmatrix}$ 是系统 (1) 取 $\lambda = \lambda'$ 的解,那么

$$\psi' = \begin{pmatrix} \psi^{(2)}(\lambda') \\ \psi^{(1)}(\lambda') \end{pmatrix}$$

便是 (1) 取 $\lambda = -\lambda'$ 的解. 后一情况同对合 (6a) 一起意味着,

$$\varphi^{(1)}(x,\lambda) = -\bar{\varphi}^{(1)}(x,-\bar{\lambda}),$$
$$\varphi^{(2)}(x,\lambda) = \bar{\varphi}^{(2)}(x,-\bar{\lambda}),$$
$$\psi^{(1)}(x,\lambda) = \bar{\psi}^{(1)}(x,-\bar{\lambda}),$$
$$\bar{\psi}^{(2)}(x,\bar{\lambda}) = -\psi^{(2)}(x,-\lambda).$$

同时从 (8) 看到

$$a(\lambda) = \bar{a}(-\bar{\lambda}), \quad b(\lambda) = -\bar{b}(-\lambda). \tag{15}$$

其中，公式 (15) 的第一个表示，$a(\lambda)$ 的零点分布相对虚轴是对称的；当 $\mathrm{Re}\lambda = 0$ 时，$a(\lambda)$ 为实的. 而公式 (15) 的第二个，严格来说，仅在实轴上才有意义，在实轴上第二个公式给出

$$r(-\lambda) = -\bar{r}(\lambda). \tag{16}$$

但是，如果 $q(x)$，$r(x)$ 是有限函数，那么解 $\varphi(x,\lambda)$，$\psi(x,\lambda)$ 便是 λ 的整函数，从而 $b(\lambda)$ 可以在整个复平面上确定出来. 这时，如果 λ_n 是 $a(\lambda)$ 的零点，那么由公式 (9) 定义的归一化因子 b_n 等于

$$b_n = b(\lambda_n).$$

因此，(15) 表明，如果 λ_n 在虚轴上，那么 $\mathrm{Re}b_n = 0$. 而如果 $\lambda_n = -\bar{\lambda}_m$，那么从 (15) 得到 $b_n = -\bar{b}_m$.

逆问题方程表明，方程 (1) 的势单值地由下面集合所确定：

$$s = (\lambda_n, b_n, n = 1, \cdots, N, \mathrm{Im}\lambda_n > 0;$$
$$r(\lambda), -\infty < \lambda < \infty),$$

此集合称为方程 (1) 的散射数据. 由于 (11)，(12) 映象 $q(x) \to s$ 是单值可逆的.

下面假设 $q(x)$ 满足前节所列举的任何一个方程，我们来求散射数据对时间的依赖关系. 首先我们要注意到，对上面所引用的 $V(\lambda)$ 矩阵的确定只精确到单位矩阵的倍数. 因此，我们每次都将选取这样的矩阵加到 $V(\lambda)$ 上. 使得当

$x \to -\infty$ 时 $\varphi(x, \lambda)$ 的渐近值与时间无关（要记住，φ 对 t 的依赖关系由方程 (8.9) 给出）.就非线性薛定谔方程 (8.14) 而言，上述条件意味着，应把 $2i\lambda^2$ 加到矩阵 $V(\lambda)$ (8.13) 上；然后，当 $x \to +\infty$ 时，我们不用 $\varphi(x, \lambda)$ 而用从 (8) 得到它的渐近表达式代入到 (8.9)，再令 $r, q = 0$，便得到

$$\dot{a}(\lambda) = 0, \quad \dot{b}(\lambda) = 4i\lambda^2 b(\lambda),$$

即

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)\exp(4i\lambda^2 t). \quad (17)$$

由于本征值 λ_n 是函数 $a(\lambda)$ 的零点，而 $a(\lambda)$ 与时间无关，故 λ_n 也与时间无关. 至于求因子 b_n 对 t 的依赖关系，即可借助于 (17) 延拓到复平面上，也可以直接从 (8.9)，(9) 求出：

$$b_n(t) = b_n(0)\exp(4i\lambda_n^2 t). \quad (18)$$

我们提醒一下，方程 (8.14a)，(8.14b) 的散射数据对时间的依赖关系是同样的. 同时，当然应记住，这些问题的对合运算是按着不同关系建立的；特别是，对于方程 (8.14b) 这一情况，由于 (7b)，还导致 $r(\lambda)$ 的模小于 1 的结果：

$$|r(\lambda)| < 1.$$

此外，由于在简化 (b) 下，没有分立谱，因此，(8.14b) 的散射数据也没有分立谱的特征. 显然，所谈的这一切，对于前节含有字母 b 编号的全部演化方程都是对的.

完全类似地求出 MKdV 方程 (8.17) 的散射数据对时间的依赖关系：

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \ b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)\exp(-8i\lambda^3 t),$$
$$\dot{\lambda}_n = 0, \ b_n(t) = b_n(0)\exp(-8i\lambda^3 n t). \quad (19)$$

对于 sin-Gordon 方程 (8.19a) 来说，当 $|x| \to \infty$ 时，一个自然边界条件是

$$u(x) \to 0 \ (\mathrm{mod} 2\pi).$$

因此由于 (8.19a)，散射数据的演化有下面形式：

$$a(\lambda, t) = a(\lambda, 0), \quad b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)\exp\left(-\frac{i}{2\lambda}t\right),$$

$$\dot{\lambda}_n = 0, \quad b_n(t) = b_n(0)\exp\left(-\frac{i}{2\lambda_n}t\right). \tag{20}$$

关于方程(8.19b)的散射数据对时间的依赖关系，也得到这些公式．同时，自然应假定当$|x| \to \infty$时，$u \to 0$.

§ 10. 非线性薛定谔方程

本节我们将详细研究非线性薛定谔方程(8.14a)

$$ir_t + r_{xx} + 2|r|^2 r = 0 \tag{1}$$

具有衰减快的初始条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |r(x, 0)|\, dx < \infty$$

的解．首先我们将写出(1)的精确解族——N个孤子解．也像 KdV 理论一样，N个孤子解相应于"无反射势"，对于这种势，所有λ的$r(\lambda) = 0$．反射系数等于零表明，

$$|a(\lambda)|^2 = 1 \quad (\mathrm{Im}\lambda = 0)$$

以及在λ上半平面解析的函数$a(\lambda)$完全由它自己的零点$\lambda_1 \cdots \lambda_N$ ($\mathrm{Im}\lambda_i > 0$)来确定：

$$a(\lambda) = \prod_{n=1}^{N} \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \bar{\lambda}_n}.$$

这时逆问题方程组(9.11)，(9.12)变成函数$\psi(x, \lambda_n)$的线性代数方程组：

$$\tilde{\psi}(x, \lambda_n) e^{i\bar{\lambda}_n x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{N} \frac{c_m \psi(x, \lambda_m) e^{i\lambda_m x}}{\bar{\lambda}_n - \lambda_m},$$

$$n = 1, \cdots, N, \tag{2}$$

式中c_n表示量$c_n = b_n / a'(\lambda_n)$．对方程(2)作对合运算*并

---

*) 原文印成"операция эволюции"(演化运算)是不对的．——译注．

顾及到 $\tilde{\bar{\psi}} = -\psi$，我们求出

$$\psi(x, \lambda_n)e^{-i\lambda_n x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{N} \frac{\bar{c}_m \tilde{\psi}(x, \lambda_m) e^{-i\bar{\lambda}_m x}}{\bar{\lambda}_m - \lambda_n}. \quad (3)$$

其次,把(2)代到(3)，我们得到 $\psi(x, \lambda_n)$ 的封闭性方程组；我们记作 $\psi(x, \lambda_n)e^{i\lambda_n x} = \chi_n(x)$，便得到

$$\chi_n(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2i\lambda_n x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sum_{m=1}^{N} \frac{\bar{c}_m e^{2i(\lambda_n - \bar{\lambda}_m)x}}{\bar{\lambda}_m - \lambda_n}$$
$$- \sum_{k,m} \frac{\bar{c}_m e^{2i\lambda_n x}}{\bar{\lambda}_m - \lambda_n} \frac{c_k e^{-2i\bar{\lambda}_m x}}{\lambda_k - \bar{\lambda}_m} \chi_k(x). \quad (4)$$

这时向量 $\chi_n(x)$ 的分量方程是独立的. 从(9.13)可以看出，$\chi_n^{(1,2)}(x)$ 确定 $q(x)$，$|r(x)|^2$：

$$|r(x)|^2 = 2i \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_n^{(2)}(x), \quad (5)$$

$$q(x) = -2 \sum_{n=1}^{N} c_n \chi_n^{(1)}(x). \quad (6)$$

求解系统(4)并把 $\chi_n^{(2)}$ 代入到(5)，利用类似于在§3所作的讨论,我们求出：

$$|r(x)|^2 = \frac{d^2}{dx^2} \ln \det(1 + \bar{A}A), \quad (7)$$

式中 $N \times N$ 方阵具有下面形式：

$$A_{nm} = \frac{c_m e^{-2i\bar{\lambda}_n x}}{\lambda_m - \bar{\lambda}_n}. \quad (8)$$

解(7)对时间的依赖关系应从公式(9.18)得到，根据此公式(8)中的 c_m 应换成

$$c_m(t) = c_m(0)\exp(4i\lambda_m^2 t).$$

上面所指出的方程(1)这类解的最简单的代表是一个孤子. 我们令 $N = 1$ 并引入记号

$$\mathrm{Re}\lambda_1 = \xi, \ \mathrm{Im}\lambda_1 = \eta, \quad x_0 = \frac{1}{2\eta} \ln |b_1(0)|, \tag{9}$$

从 (7) 得到

$$|r(x, t)|^2 = \frac{4\eta^2}{\mathrm{ch}^2 2\eta(x - x_0 + 4\xi t)}.$$

再求出 $\chi_n^{(1)}(x)$ 并代入到 (6)，直接求出 $r(x)$

$$r(x) = 2i\eta \frac{\exp(-2i\xi x - 4i(\xi^2 - \eta^2)t - i\varphi_0)}{\mathrm{ch} 2\eta(x - x_0 + 4\xi t)}, \tag{10}$$

这里

$$\varphi_0 = \arg b_1(0). \tag{11}$$

因此，$\eta = \mathrm{Im}\lambda_1$ 确定孤子的振幅(和宽度)，而 $\xi = \mathrm{Re}\lambda_1$ 确定孤子的速度 $v = -4\xi$.

在一般情况下，如果在量 $\mathrm{Re}\lambda_n (n = 1, \cdots, N)$ 之中不相重，那么当 $t \to \pm\infty$ 时，(7)，(8)的渐近解乃是N个具有振幅 $\eta_i = \mathrm{Im}\lambda_i$ 和速度 $v_i = -4\mathrm{Re}\lambda_i$ 的孤子(10)之和. 孤子的这些参数无论 $t \to -\infty$ 还是 $t \to +\infty$ 都是同样的. 也象 KdV 理论一样，受到改变的仅仅是孤子的位相 x_{0i}，φ_{0i}. 在计算位相的改变时可以照抄 § 3 的程序. 如果按孤子速度递增次序对它们加以编号，即令

$$\mathrm{Re}\lambda_1 > \mathrm{Re}\lambda_2 > \cdots > \mathrm{Re}\lambda_N,$$

那么差 $\Delta x_{0i} = x_{0i}(+\infty) - x_{0i}(-\infty)$，$\Delta\varphi_0 = \varphi_{0i}(+\infty) - \varphi_{0i}(-\infty)$ 由下面公式给出:

$$\Delta x_{0i} = \frac{1}{2\eta_i} \sum_{n=i+1}^{N} \ln \left| \frac{\lambda_i - \lambda_n}{\lambda_i - \bar{\lambda}_n} \right|^2 - \frac{1}{2\eta_i} \sum_{n=1}^{i-1} \ln \left| \frac{\lambda_i - \lambda_n}{\lambda_i - \bar{\lambda}_n} \right|^2,$$

$$\Delta\varphi_{0i} = 2 \sum_{n=i+1}^{N} \arg \frac{\lambda_i - \lambda_n}{\lambda_i - \bar{\lambda}_n} - 2 \sum_{n=1}^{i-1} \arg \frac{\lambda_i - \lambda_n}{\lambda_i - \bar{\lambda}_n}.$$

这些公式可以解释为（曾采用过）孤子成对地进行碰撞（并且每一个孤子都同其余的每一个进行碰撞）. 在每一对碰

撞中，较快的孤子向前附加的位移量值为

$$\frac{1}{2\eta_m}\ln\left|\frac{\lambda_m-\bar{\lambda}_p}{\lambda_m-\lambda_p}\right|^2,\quad \mathrm{Re}\lambda_m<\mathrm{Re}\lambda_p,$$

而较慢的向后位移的量值为

$$-\frac{1}{2\eta_p}\ln\left|\frac{\lambda_m-\bar{\lambda}_p}{\lambda_m-\lambda_p}\right|^2.$$

每一个孤子的总位移等于该孤子在所有的对碰撞中位移的代数和，因此完全没有多粒子碰撞效应． 位相 φ_{0i} 的情形也是类似的．

孤子对的分离速度是同它们的参数值 $\xi_i=\mathrm{Re}\lambda_i$ 之差成比例的．因此当 ξ_i 相同时，孤立子不分开，从而构成一个束缚态．让我们来研究N个孤子的束缚态，为简单起见，我们假定 $\xi_i=0$． 于是 $c_m(t)=c_m(0)\exp(-4i\eta_m^2t)$． 直接从一般公式 (7)，(8) 可以看出，束缚态乃是方程 (1) 的条件周期解，这种解在一般情况中用N个频率 $w_n=4\eta_n^2$ 来表征．事实上，所有可能的频差都包含在公式 (7) 中，所以由两个孤子所构成的束缚态，总共只能用一个频率 $4(\eta_1^2-\eta_2^2)$ 来表征，从而这种束缚态乃是方程 (1) 的周期性解．不过，应强调指出，这里所说的束缚态并不是通常意义上的束缚态，因为所描述的构成这种束缚态之能量刚好等于这些单个孤子能量之和(参看下面)，即结合能等于零．这种状态是不稳定的，因为实际上，初始条件 $r(x,0)$ 的任何一个小扰动都会导致这种束缚态衰变成一些单个孤子． 这些孤子的速度比例于这种扰动，一般说来，它们的速度是不同的．

下面我们在方程 (1) 的范围内考虑一个“大的”初始条件，系统 (9.1) 即方程组

$$\begin{aligned}\psi_x^{(1)}&=i\lambda\psi^{(1)}+i\bar{r}(x)\psi^{(2)},\\ \psi_x^{(2)}&=-i\lambda\psi^{(2)}+ir(x)\psi^{(1)}\end{aligned}\qquad(12)$$

的本征值数是很大的．此外，我们还将假定初始函数的变化是平滑的，因此 $r_x/r \ll \lambda$．相应非线性薛定谔方程，这就意味着在所考虑的初始条件下，非线性项远远大于线性项 r_{xx}．在这种条件下，方程 (1) 可应用能以特征线法找到解 $r(x, t)$ 的"非线性几何光学"．但是，这时发现，这种光滑解只能延续到有限的 t，在这以后，由于形成焦点或焦散面，这种解被破坏了，这时，几何光学近似是不容许的．

在我们看来，所谓大范围初始条件的情形是指这种情形，即系统 (12) 可以应用准经典近似．我们借助于方程 (12) 的第一个式子，将 $\psi^{(2)}$ 用 $\psi^{(1)}$ 来表式，并代入到第二式，忽略掉 $r_x(x, 0)$ 便得到

$$-\psi_{xx}^{(1)} - |r(x,0)|^2\psi^{(1)} = \lambda^2\psi^{(1)}, \tag{13}$$

此即薛定谔方程．在准经典近似中，对所有不太小的 λ^2 来说，反射系数成指数地减小．所以在精确到指数情况下，可以按某种 N 个孤子解的模型来建立具有准经典初始条件的演化型解．为了求出包含在这种解中的孤子参数，我们注意到，按所指出的精确度，由于 (13)，(12) 的本征值位于虚轴上：$\lambda_n^2 < 0$；$\lambda_n = i\eta_n$．这时 η_n 由玻尔量子化规则给出

$$\oint\sqrt{|r|^2 - \eta_n^2}\, dx = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

实际上，λ_n 并不严格分布在虚轴上，还存在小的实部残余，这种实部确保这些单个孤子的分离．简单的估计得出实部与虚部的特征比：$\xi/\eta \sim N^{-1/2}$，这里 N 为能级总数

$$N = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |r(x)|\, dx, \tag{14}$$

在准经典极限下，此量是很大的．

下面让我们研究一个相反情况，即我们提出这样一个问题：问题 (12) 的势应满足什么样条件才能使这种势没有分

立谱？答案十分简单；只要满足下面不等式就够了：

$$\int_{-\infty}^{\infty}|r(x)|dx < \ln(2+\sqrt{3})\simeq 1.32, \tag{15}$$

因此，只要方程 (1) 的初始条件 $r(x, 0)$ 满足 (15)，那么解 $r(x, t)$ 将不包含任何孤子.

为了证实所作出的这一结果，让我们考虑问题 (12) 的解 $\varphi^{(1)}(x, \lambda)$，$\varphi^{(2)}(x, \lambda)$，当 $x \to -\infty$ 时，它们的渐近形式是：$\varphi^{(1)} \to 0$，$\varphi^{(2)} \to \exp(-i\lambda x)$. 当 $x \to +\infty$ 时，恰好从 (9.8) 得到：$\chi = \varphi^{(2)}\exp(i\lambda x) \to a(\lambda)$. 函数 $\chi(x, \lambda)$ 满足方程：

$$\chi(x, \lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{x} r(x')\int_{-\infty}^{x'}\exp(2i\lambda(x'-x'')) \times \bar{r}(x'')\chi(x'', \lambda)dx''dx'. \tag{16}$$

当 $\mathrm{Im}\lambda \geqslant 0$ 时，从 (16) 得到

$$|\chi(x, \lambda)| \leqslant 1 + \int_{-\infty}^{x}|r(x')| \times \int_{-\infty}^{x'}|r(x'')||\chi(x'', \lambda)|dx''dx'. \tag{17}$$

对所得到的不等式进行迭代，我们得到

$$|\chi(x, \lambda)| \leqslant 1 + \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{x}|r(x')|dx'\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\int_{-\infty}^{x}|r(x')|dx'\right)^4 + \cdots = \mathrm{ch}\int_{-\infty}^{x}|r|dx'.$$

方程 (16) 同样表示

$$|\chi(x, \lambda) - 1| \leqslant \int_{-\infty}^{x}|r(x')| \times \int_{-\infty}^{x'}|r(x'')||\chi(x'', \lambda)|dx''dx'.$$

把 (17) 代入到此不等式右边，我们得到

$$|\chi(x,\lambda) - 1| \leqslant \mathrm{ch}\int_{-\infty}^{x}|r(x')|dx' - 1.$$

因此，当 $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ 时

$$|a(\lambda) - 1| \leqslant \operatorname{ch}\int_{-\infty}^{\infty} |r(x)|dx - 1. \tag{18}$$

现在假设

$$\operatorname{ch}\int_{-\infty}^{\infty} |r(x)|dx - 1 < 1,$$

那么从 (18) 得到 $|a(\lambda)| > 0$，即问题不存在分立谱．而上述不等式相当于(15)，也就是曾要求验证的不等式．

下面我们将研究关于非线性薛定谔方程的运动积分结构问题．也象以前曾研究过的可用逆问题方法所积分的方程一样，方程 (1) 同样存在无限多个单值的初积分．可从 (9.17) 看到，这些积分是任意 λ 的泛函 $a(\lambda)[r, \bar{r}]$．我们将从这种集合中挑选出方程 (1) 的关于 r、$\bar{r}$ 的定域多项式运动积分的可数集．同 KdV 方程一样，我们也从 $\ln a(\lambda)$ 按 $1/\lambda$ 幂次的展开式中得到这种可数集：

$$\ln a(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(2i\lambda)^n}. \tag{19}$$

因为对于在 §8 中所指出的全部方程来说，$a(\lambda)$ 皆与时间无关，故泛函 $c_n[r, q]$ 也将是 sin-Gordon 和 MKdV 方程的运动积分．因此我们先在普遍情况下计算系统 (9.1) 的 $c_n[r, q]$：

$$\varphi_x^{(1)} = i\lambda\varphi^{(1)} + iq\varphi^{(2)}, \quad \varphi_x^{(2)} = -i\lambda\varphi^{(2)} + ir\varphi^{(1)}.$$

因 $a(\lambda) = \lim\limits_{x\to\infty} \varphi^{(2)}(x,\lambda)e^{i\lambda x}$，(式中 $\varphi^{(1,2)}$——此系统当 $x\to -\infty$ 时具有渐近值 $\varphi^{(1)}\to 0$，$\varphi^{(2)}\to e^{-i\lambda x}$ 的解.) 故我们假定 $\varphi^{(2)}(x, \lambda) = e^{-i\lambda x+\Phi(x,\lambda)}$ 并消去 $\varphi^{(1)}$，对 $\Phi(x, \lambda)$ 得到

$$2i\lambda\Phi_x = rq + \Phi_x^2 + r\frac{d}{dx}\frac{\Phi_x}{r}. \tag{20}$$

同时

$$\ln a(\lambda) = \Phi(\infty, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(x, \lambda) dx.$$

其次，把展开式

$$\Phi_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{(2i\lambda)^n}$$

代入到 (20)，我们得到 $\varphi_n(x)$ 的递推系统:

$$\varphi_{n+1} = r \frac{d}{dx} \frac{\varphi_n}{r} + \sum_{n_1+n_2=n} \varphi_{n_1}\varphi_{n_2}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

并且 $\varphi_1(x) = r(x)q(x)$. 待求泛函 $C_n[r, q]$ 由下面积分给出:

$$C_n[r, g] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) dx.$$

我们列出 C_n 头四个显示形式:

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} rq dx, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} rq_x dx,$$

$$C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (rq_{xx} + r^2q^2) dx, \tag{21}$$

$$C_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(rq_{xxxx} + r \frac{d}{dx} rq^2 + 2r^2qq_x \right) dx.$$

如果在 $C_n[r, q]$ 中假定 $q = \bar{r}$，便从中得到非线性薛定谔方程 (1) 的运动积分:

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |r|^2 dx, \quad C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} r\bar{r}_x dx,$$

$$C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (-|r_x|^2 + |r|^4) dx. \tag{22}$$

头三个 $C_n[r, \bar{r}]$ 有简单的物理意义: C_1 具有“粒子数”的意义，C_2——精确到一个因子范围内等于场的总动量，而 C_3 乃是方程 (1) 的哈密顿量. 守恒量 C_2 同非线性薛定谔方程的平移不变性有关，C_3 同相对时间平移的不变性有关; C_1 守恒是由于方程 (1) 在 $r \to re^{i\alpha}$, $\bar{r} \to \bar{r}e^{-i\alpha}$ 变换下不变.

方程 (1) 是哈密顿系统．相空间由函数对 $(r(x),\ \bar{r}(x))$ 组成，泊松括号有下面形式：

$$\{S, T\} = -i\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\delta S}{\delta r(x)}\frac{\delta T}{\delta \bar{r}(x)} - \frac{\delta S}{\delta \bar{r}(x)}\frac{\delta T}{\delta r(x)}\right), \quad (23)$$

因此 (1) 写成下面形式：

$$\dot{r} = \{r, H\} = -i\frac{\delta H}{\delta \bar{r}}, \quad (24)$$

式中 $H = -C_3$. 同时当函数微分时，应把 r, $\bar{r}$ 看成是独立的．

哈密顿系统的非线性薛定谔方程是完全可积的．用散射数据简单地表示出作用一角变量． 相应的计算同在 § 6 中所作的区别不大，因此这里我们省去已经作过的计算．

首先必须求出跃迁矩阵元关于 $r(x)$, $\bar{r}(x)$ 的微商． 这并不难作，这要利用 $a(\lambda)$ 的表示 (9.8)：

$$a(\lambda) = W(\psi(x, \lambda),\ \varphi(x, \lambda)),$$

以及 $b(\lambda)$ 的类似表示：

$$b(\lambda) = W(\varphi(x, \lambda),\ \tilde{\psi}(x, \lambda)).$$

现在算出变分导数 $\delta\varphi(y, \lambda)/\delta r(x)$, $\delta\varphi(y, \lambda)/\delta\bar{r}(x)$ 等等，求得

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta r(x)} = i\psi^{(1)}(x, \lambda)\varphi^{(1)}(x, \lambda),$$

$$\frac{\delta b(\lambda)}{\delta r(x)} = -i\varphi^{(1)}(x, \lambda)\tilde{\psi}^{(1)}(x, \lambda);$$

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta \bar{r}(x)} = -i\psi^{(2)}(x, \lambda)\varphi^{(2)}(x, \lambda);$$

$$\frac{\delta b(\lambda)}{\delta \bar{r}(x)} = i\varphi^{(2)}(x, \lambda)\tilde{\psi}^{(2)}(x, \lambda).$$

现在可求出跃迁矩阵元之间的泊松括号．例如，

$$\{a(\lambda), b(\lambda')\} = -i\int_{-\infty}^{\infty} dx[\psi^{(1)}(x, \lambda)\varphi^{(1)}(x, \lambda)\varphi^{(2)}(x, \lambda')$$
$$\times \tilde{\psi}^{(2)}(x, \lambda') - \psi^{(2)}(x, \lambda)\varphi^{(2)}(x, \lambda)\varphi^{(1)}(x, \lambda')\tilde{\psi}^{(1)}(x, \lambda')]$$

同在 § 6 中一样，被积表达式是全微商，这是因为这需要直接验证的下面关系式是成立的：

$$\varphi^{(1)}(x, \lambda)\psi^{(1)}(x, \lambda)\varphi^{(2)}(x, \lambda')\tilde{\psi}^{(2)}(x, \lambda')$$
$$- \psi^{(2)}(x, \lambda)\varphi^{(2)}(x, \lambda)\varphi^{(1)}(x, \lambda')\tilde{\psi}^{(1)}(x, \lambda')$$
$$= \frac{1}{2i(\lambda - \lambda')}\frac{d}{dx}[W(\varphi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda'))$$
$$\times W(\psi(x, \lambda), \tilde{\psi}(x, \lambda'))].$$

其次，用散射数据表示 φ 和 ψ 的渐近形式，得出公式

$$\{a(\lambda), b(\lambda')\} = \frac{a(\lambda)b(\lambda')}{2(\lambda - \lambda')} - \frac{\pi i}{2}a(\lambda)b(\lambda)\delta(\lambda - \lambda').$$

这样，算出跃迁矩阵元所有可能对之间的泊松括号，不难求出下面变量是正则共轭的：

$$n(\lambda) = \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|a(\lambda)|^2}, \quad \varphi(\lambda) = \arg b(\lambda). \qquad (25)$$

同样可求出正则共轭变量的补集对应于分立谱

$$N_k = 2\lambda_k, \quad \Phi_k = \ln\frac{1}{b_k}, \quad k = 1, 2, \cdots, N. \qquad (26)$$

这些变量都是复的.

其次，由 $n(\lambda)$，N_k 反求 $\ln a(\lambda)$，得到

$$C_m[r, \bar{r}] = \sum \frac{i^m}{m}(\bar{N}_k^m - N_k^m)$$
$$+ (2i)^{m-1}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{m-1}n(\lambda)d\lambda, \qquad (27)$$

其中，非线性薛定谔方程的哈密顿函数表示为

$$H = \int_{-\infty}^{\infty}(|r_x|^2 - |r|^4)dx = \sum_k \frac{i}{3}(\bar{N}_k^3 - N_k^3)$$

$$+ 4\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 n(\lambda) d\lambda, \tag{28}$$

即方程 (1) 是完全可积的. 任何一个形如 (24) 这样的方程 (这种方程的哈密顿量仅是 $C_n[r, \bar{r}]$ 的函数) 将同非线性薛定谔方程一道是完全可积的. 例如,我们取泛函 $C_4[r, \bar{r}]$ 作为 H, 便得到方程:

$$ir_t + r_{xxx} + 6|r|^2 r_x = 0,$$

此即 MKdV 的复的变形. 当 $r = q$ 时,原 MKdV(8.17a) 表示成下面形式:

$$r_t = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H}{\delta r},$$

式中 $H = -C_3/2$, 并且这种方程同样是完全可积的. 证实这种可积性需要专门作,不过,我们将不作这种证明. 我们还要指出(同样也没证明)下面形式的任何一个系统是完全可积的:

$$\dot{r} = \frac{\delta H}{\delta q}, \quad \dot{q} = -\frac{\delta H}{\delta r}, \tag{29}$$

式中哈密顿量 H 是由积分 $C_n[r, q]$ 以函数形式给出的. 例如,当 $H = C_4[r, q]$ 时,便由 (29) 得到方程组 (8.16).

现在还是让我们回到方程 (1) 中来. 如果引入双重实正则变量的集合来代替复变量集合(26)那是非常方便的. 我们假定

$$N_k = i(\bar{N}_k - N_k), \quad \mu_k = (\bar{\Phi}_k - \Phi_k)/2i,$$
$$v_k = -(N_k + \bar{N}_k), \nu_k = -(\Phi_k + \bar{\Phi}_k)/2,$$

因此 $N_k > 0$.

变量对 N_k, μ_k 和 v_k, ν_k 是正则共轭的. 运动积分在这种新变量中有下面形式:

"粒子数"

$$N = \sum_k N_k + \int n(\lambda) d\lambda, \tag{30}$$

动量

$$P = iC_2 = i \int r \bar{r}_x dx = \sum_k \frac{v_k N_k}{2} - 2 \int \lambda n(\lambda) d\lambda, \tag{31}$$

能量

$$E = - C_3 = \int (|r_x|^2 - |r|^4) dx$$

$$= \sum_k \left(- \frac{N_k^3}{12} + \frac{N_k v_k^2}{4} \right) + 4 \int \lambda^2 n d\lambda. \tag{32}$$

由此可见，所引入的变量 $v_k = -4\mathrm{Re}\lambda_k$ 不是别的，正是第 k 个孤子的速度. 这时从(31),(32)可以看出，$N_k/2$ 应解释为孤子的质量；加数 $N_k v_k^2/4$ 是孤子的动能，而 $-N_k^3/12$ 乃是孤子的静止能量.从 (31), (32) 同样可看出，$(n(\lambda)/2)d\lambda$ 应解释为运动在速度间隔 $(-4\lambda, -4\lambda + d\lambda)$ 中的粒子质量. 正象将要在第四章所指出的那样，如果所论及的问题是方程(1)在 $t \to \pm\infty$ 时的渐近解，那么上述这些看法可以按真正意义去理解.

在结束这节时，让我们来考虑非线性项是另一种符号的非线性薛定谔方程，即 (8.16b):

$$ir_t + r_{xx} - 2|r|^2 r = 0. \tag{33}$$

问题 (9.1) 中同此方程相联系的简化为 $q = -\bar{r}$. 正象已经指出过的那样，对于这种情形，在 λ 上半平面上，$|a(\lambda)| \geq 1$，因而 (33) (当 $|x| \to \infty$ 时，$|r| \to 0$) 也不存在孤子解. (33) 这种形式的非线性薛定谔方程同样是完全可积的. 哈密顿函数是积分 $C_3[r, q]|_{q=-\bar{r}}$；在正则变量

$$n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \ln |a(\lambda)|^2, \quad \varphi(\lambda) = \arg b(\lambda)$$

中，哈密顿量有下面形式:

$$H = \int(|r_x|^2 + |r|^4)dx = 4\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 n(\lambda)d\lambda.$$

同时，

$$N = -C_1 = \int |r|^2 dx = \int n(\lambda)d\lambda,$$

$$P = -iC_2 = i\int r\bar{r}_x dx = -2\int \lambda n(\lambda)d\lambda.$$

§11. sin-Gordon 方程

这一节专用来研究下面方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \sin u. \tag{1}$$

当罗巴切夫斯基平面向三维欧几里德空间嵌入时，便直接出现这样形式的方程．采用变量 $\xi = x + t$, $\tau = t - x$ 上方程具有下面形式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \sin u = 0. \tag{2}$$

这种形式同样有各种不同的物理应用．更有意义的是 (2) 这种形式的 sin-Gordon 方程还成为场论的非平凡模型．

借助于微分方程组 (8.12) (这时应假定 $r = q = u_x/2$) 来积分方程 (1)：

$$\begin{aligned} \psi_x^{(1)} &= i\lambda\psi^{(1)} + i\frac{u_x}{2}\psi^{(2)}, \\ \psi_x^{(2)} &= -i\lambda\psi^{(2)} + i\frac{u_x}{2}\psi^{(1)}. \end{aligned} \tag{3}$$

前节的结果能立即指出方程 (1) 的 N 个孤子的解族．对无反射势来说，问题 (3) 的本征函数方程组的确有 (10.4) 的形式：

$$\psi_n(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\lambda_n x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sum_{m=1}^{N} \frac{\bar{c}_m e^{i(\lambda_n - 2\bar{\lambda}_m)x}}{\bar{\lambda}_m - \lambda_n}$$

$$-\sum_{k,m}\frac{\bar{c}_m e^{i\lambda_n x}}{\bar{\lambda}_m-\lambda_n}\frac{c_k e^{i(\lambda_k-2\bar{\lambda}_m)x}}{\lambda_k-\bar{\lambda}_m}\phi_k(x), \tag{4}$$

不过对此式应顾及到势的实数性这一事实． 因为我们知道，实数势使 $a(\lambda)$ 的零点分布受到了限制；即，这些零点相对虚轴是以对称形式分布的，也即点 $\bar{\lambda}$ 同点 λ 一道属于零点集合．此外，由于 (9.15) 方程 (4) 所出现的量 $c_n=b_n/a'(\lambda)$ 在成对称分布的零点处是相互复共轭的． 而势按公式 (10.6)，由 (4) 的解确定

$$u_x=-4\sum_n c_n\phi_n^{(1)}e^{i\lambda_n x}. \tag{5}$$

注意到上面所指出的这些限制之后，对 $\phi_n^{(1)}$ 来说，方程 (4) 可写成

$$\phi_n^{(1)}-\sum_{k,m}\frac{c_m e^{i(\lambda_n+\lambda_m)x}}{\lambda_n+\lambda_m}\frac{c_k e^{i(\lambda_m+\lambda_k)x}}{\lambda_m+\lambda_k}\phi_k^{(1)}=e^{i\lambda_n x}. \tag{5a}$$

我们引入矩阵

$$v_{nm}=\frac{c_m e^{i(\lambda_n+\lambda_m)x}}{\lambda_n+\lambda_m};\ n,m=1,2,\cdots,N, \tag{6}$$

并用 ϕ, $e^{i\lambda x}$ 来表示列 $\phi_1^{(1)},\phi_2^{(1)},\cdots,\phi_N^{(1)}$ 及 $e^{i\lambda_1 x},\cdots,e^{i\lambda_N x}$，把系统 (5a) 表示成

$$(1-v^2)\phi=e^{i\lambda x}.$$

因此，

$$(1-v)\phi=(1+v)^{-1}e^{i\lambda x},$$
$$(1+v)\phi=(1-v)^{-1}e^{i\lambda x},$$

从上两式可得

$$\phi=\frac{1}{2}\left[(1+v)^{-1}+(1-v)^{-1}\right]e^{i\lambda x}.$$

现在不难看到，公式 (5) 的右边乃是对数导数，从而

$$u(x)=-\frac{2}{i}\ln\frac{\det(1+v)}{\det(1-v)}.$$

利用 v 的相似矩阵来代替 v 是较方便的:

$$\tilde{v}_{nm}(x, t) = \frac{c_m(0)}{\lambda_n + \lambda_m} \exp\left(2i\lambda_m x - \frac{i}{2\lambda_m} t\right), \qquad (7)$$

式中我们已经按 (9.20) 考虑过了依赖关系 $c_n(t)$. 因此,方程 (1) 的N个孤子解便由下面公式给出:

$$u(x,t) = -\frac{2}{i} \ln \frac{\det(1+\tilde{v})}{\det(1-\tilde{v})} = -4 \arg \det(1+\tilde{v}). \qquad (8)$$

下面我们来研究 (7), (8) 中最简单的情形.

设 $a(\lambda)$ 只存在唯一一个零点,它位于虚轴上的点 $\lambda_1 = i\lambda$ 处;这时量 $c(0)$ 一定是实的. 于是

$$u(x, t) = 4\varepsilon \operatorname{arc\,tg} \exp[-2\lambda(x-x_0) - t/2\lambda] = 4\operatorname{arc\,tg} \exp[-\varepsilon(2\lambda(x-x_0) + t/2\lambda)] \pmod{2\pi}, \qquad (9)$$

式中 $\varepsilon = \operatorname{sign} c(0)$, $x_0 = \frac{1}{2\lambda} \ln \left|\frac{c(0)}{2\lambda}\right|$.

我们将把带有 $\varepsilon = -1$ 的解 (9) 称为方程 (1) 的孤子, 而把 $\varepsilon = +1$ 称为反孤子. 用变量 $\xi = t + x$, $\tau = t - x$, 再看这两个解是最自然不过的:

$$u(\xi, \tau) = 4\operatorname{arc\,tg} \exp\left(-\varepsilon \frac{\xi - \xi_0 - v\tau}{\sqrt{1-v^2}}\right), \qquad (10)$$

式中 $v = (4\lambda^2 - 1)/(4\lambda^2 + 1)$, $\xi_0 = (1+v)x_0$. 因此,解 (10) 乃是方程 (2) 的以速度 v 运动的孤子(反孤子). 这种解存在非零的"拓扑荷" Q

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_\xi d\xi,$$

显然,这种拓扑荷是方程 (2) 的初积分. 在 (10) 中

$$Q = -\varepsilon.$$

对于孤子 $Q = 1$, 而对反孤子 $Q = -1$.

当 $a(\lambda)$ 存在一对相对于虚轴成对称的零点 ($\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda + i\mathrm{Im}\lambda = \lambda$, $\lambda_2 = -\mathrm{Re}\lambda + i\mathrm{Im}\lambda$) 时，解 (7), (8) 便出现另外一种基本结构．这时 $c_1 = \bar{c}_2 = c$ 从而 (7), (8) 的表达式简化成:

$$u(x, t) = 4\mathrm{arctg}\left\{\frac{\mathrm{Im}\lambda}{|\mathrm{Re}\lambda|}\cdot\frac{\sin\left[\frac{\mathrm{Re}\lambda}{2|\lambda|^2}t - 2\mathrm{Re}\lambda x - \varphi_0\right]}{\mathrm{Ch}\left[2\mathrm{Im}\lambda(x - x_0) + \frac{\mathrm{Im}\lambda}{2|\lambda|^2}t\right]}\right\}, \tag{11}$$

或者采用方程 (2) 的变量，

$$u(\xi, \tau) = 4\mathrm{arctg}\left\{\frac{\mathrm{Im}\lambda}{|\mathrm{Re}\lambda|}\,\frac{\sin\left[\frac{\mathrm{Re}\lambda}{|\lambda|}\left(\frac{\tau - v\xi}{\sqrt{1 - v^2}} - \psi_0\right)\right]}{\mathrm{Ch}\left[\frac{\mathrm{Im}\lambda}{|\lambda|}\left(\frac{\xi - vt - \xi_0}{\sqrt{1 - v^2}}\right)\right]}\right\}, \tag{12}$$

式中

$$v = \frac{4|\lambda|^2 - 1}{4|\lambda|^2 + 1}, \quad x_0 = \frac{1}{2\mathrm{Im}\lambda}\ln\left[\frac{\mathrm{Re}\lambda}{\mathrm{Im}\lambda}\,\frac{c}{2\lambda}\right],$$

$$\varphi_0 = \arg\frac{c}{2\lambda}, \quad \psi_0 = \frac{|\lambda|}{\mathrm{Re}\lambda}\varphi_0, \quad \xi_0 = (1 + v)x_0.$$

我们将把这种解称为双重(或者脉动)孤子． 在 $\mathrm{Re}\lambda/\mathrm{Im}\lambda$ 值充分小的各种情形中可以把它们解释为孤子与反孤子的束缚态．当 $|\lambda| = \frac{1}{2}$ 即 $v = 0$ 时，解 (12) 便是时间 τ 的周期函数． 我们再来看看在 τ_0 时刻即 $\sin[2\mathrm{Re}\lambda(\tau_0 - \psi_0)] = 1$ 时，(12) 会出现什么形式．显然，这时

$$\frac{\partial}{\partial\tau}u(\xi, \tau)|_{\tau=\tau_0} = 0.$$

其次，再令 $\mathrm{Re}\lambda \ll 1$．于是当

$$|\xi| \gg \ln \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}$$

时，函数 $u(\xi, \tau_0) = 0$; 而在 $|\xi| \ll \ln \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}$ 区域内，函数 $u(\xi, \tau_0) \simeq 2\pi$.

当 $\xi \sim \ln \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}\left(\text{或者 } \xi \simeq -\ln \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}\right)$ 时，从 (12) 我们有 $u(\xi, \tau_0) = 4\operatorname{arc tg} \exp\left(-\xi + \ln \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}\right)\left(\text{相应有 } u(\xi, \tau_0) = 4\operatorname{arc tg} \exp\left(\xi + \ln \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}\right)\right)$. 由此可见，当 $\tau = \tau_0$ 时，表达式 (12) 乃是散布在量级为 $2\ln \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda}$ 距离上的非运动孤子与反孤子的迭加，从而把它说成双重孤子或者束缚态都是允许的. 它的拓扑荷等于零.

我们现在着手研究孤子的碰撞. 在 (12) 中作极限过渡: $\mathrm{Re}\lambda \to 0$，从中所得到的解便是这类解的最简单情形(并且是完全非平凡的). 当 $v = 0$ 时从 (12) 我们有

$$u(\xi, \tau) = 4\operatorname{arc tg} \frac{\tau}{\mathrm{Ch}\xi}.$$

这种解描述在无穷远处速度为零的孤子与反孤子的相互作用.

如果 $a(\lambda)$ 在虚轴上有两个零点 $i\lambda_1, i\lambda_2 (\lambda_1, \lambda_2 > 0)$，那么从公式 (7), (8) 便得到更一般的双孤子解:

$$u(\xi, \tau) = 4\operatorname{arc tg} \frac{\frac{c_1}{2\lambda_1} \exp\left(-\frac{\xi - v_1\tau}{\sqrt{1-v_1^2}}\right) + \frac{c_2}{2\lambda_2} \exp\left(-\frac{\xi - v_2\tau}{\sqrt{1-v_2^2}}\right)}{1 - \frac{c_1c_2}{4\lambda_1\lambda_2} \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2} \exp\left(-\frac{\xi - v_1\tau}{\sqrt{1-v_1^2}} - \frac{\xi - v_2\tau}{\sqrt{1-v_2^2}}\right)}, \tag{13}$$

式中 $v_i=(4\lambda_i^2-1)/(4\lambda_i^2+1)$. 直接分析此表达式表明，当 $\tau\to\pm\infty$ 时 (13) 描述一对各自以速度 v_1, v_2 运动的且没有相互作用的孤子. 实际上，例如假定 $v_2>v_1$, 在直线 $\xi=v_1\tau+\xi'$ 上，我们来研究当 $\tau\to-\infty$ 时 (13) 的渐近式，并且把它看成是 ξ' 的函数：

$$u(v_1\tau+\xi',\tau)\to 4\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{c_1}{2\lambda_1}\exp\left(-\frac{\xi'}{\sqrt{1-v_1^2}}\right)\right].$$

此表达式描述中心坐标为

$$\xi_0^{(1)}(-\infty)=\sqrt{1-v_1^2}\ \ln\frac{|c_1|}{2\lambda_1}$$

的孤子或者反孤子(由 c_1 的符号而定). 其次，我们在这同一条直线上考虑 $\tau\to+\infty$ 时 (13) 的渐近式，得到

$$u(v_1\tau+\xi',\tau)\to-4\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{2\lambda_1}{c_1}\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\times\exp\left(\frac{\xi'}{\sqrt{1-v_1^2}}\right)\right]$$

$$=2\pi+4\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{c_1}{2\lambda_1}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}\exp\left(-\frac{\xi'}{\sqrt{1-v_1^2}}\right)\right],$$

即我们得到了同 $\tau\to-\infty$ 时相同拓扑荷的孤子；它的坐标为

$$\xi_0^{(1)}(\infty)=\sqrt{1-v_1^2}\ \ln\left[\frac{|c_1|}{2\lambda_1}\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}\right].$$

因此，当第一个孤子同第二个孤子碰撞时所受到的位移改变量为

$$\Delta\xi_0^{(1)}=-\sqrt{1-v_1^2}\ \ln\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}<0.$$

对于第二个(较快的)孤子完全类似地求出相应的量

$$\Delta\xi_0^{(2)}=\sqrt{1-v_2^2}\ \ln\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}.$$

我们看到，快孤子附加移动是向前的，而慢孤子是向后的. 同

时，孤子的散射完全同它们的拓扑荷无关. 在孤子质心坐标系(即 $v_2 = v = -v_1$) 中来看，所得到的结果是最简明的. 在这种计算系统中

$$\Delta\xi_0^{(2)} = -\Delta\xi_0^{(1)} = \sqrt{1-v^2}\ \ln\frac{1}{v_2}.$$

可以证明，同本章所研究的其它系统一样，在多个孤子碰撞中，每一个孤子的总位移等于该孤子按单个方式同所有其余的孤子碰撞的位移之和，即没有多粒子效应.

上面发展的方法能够有效地研究方程 (1). 特别是，(1) 的哥西问题归结于解系统 (3) 的散射正问题和逆问题. 可是，对于方程 (2) 来说，所引入的图象仅给出全部解总和中的某一个参数，从而不能解柯西问题. 为了解决这一问题，必须直接在变量 ξ, τ 中来改变所利用的图象.

方程 (1) 表示成下面系统的相容条件:

$$\psi_x = i\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\psi + \frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & u_x\\ u_x & 0\end{pmatrix}\psi,$$

$$\psi_t = \frac{1}{4i\lambda}\begin{pmatrix}\cos u & -i\sin u\\ i\sin u & -\cos u\end{pmatrix}\psi.$$

此系统在 ξ, τ 变量中具有下面形式:

$$\psi_\xi = \frac{i\lambda}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\psi + \frac{i}{4}\begin{pmatrix}0 & u_\xi - u_\tau\\ u_\xi - u_\tau & 0\end{pmatrix}\psi + \frac{1}{8i\lambda}\begin{pmatrix}\cos u & -i\sin u\\ i\sin u & -\cos u\end{pmatrix}\psi, \qquad (14)$$

$$\psi_\tau = -\frac{i\lambda}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\psi - \frac{i}{4}\begin{pmatrix}0 & u_\xi - u_\tau\\ u_\xi - u_\tau & 0\end{pmatrix}\psi + \frac{1}{8i\lambda}\begin{pmatrix}\cos u & -i\sin u\\ i\sin u & -\cos u\end{pmatrix}\psi. \qquad (15)$$

显然，系统 (14)，(15) 的相容条件是方程 (2). 现在我们就可以按照逆问题方法的标准图象行事：确定方程 (14) 的散射数据，借助于 (15) 求出散射数据对时间的依赖关系，最后，按散射数据来研究反求 $u(\xi, \tau)$ 的问题，即解方程 (14) 的逆散射问题. 不过，现在我们可以看出，没有任何必要详细研究方程 (14)，因为问题 (3) 和 (14) 的解存在恒等对应的关系. 例如，我们来研究系统 (14)，(15) 的解

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(2)} \end{pmatrix},$$

它是由 $\xi \to -\infty$ 时下面的渐近式所确定的:

$$\Phi^{(1)} \to 0, \quad \Phi^{(2)} \to \exp\left[-\frac{i}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4\lambda}\right)\xi + \frac{i}{2}\left(\lambda + \frac{1}{4\lambda}\right)\tau\right].$$

当 $\xi \to +\infty$ 时，Φ 作为 (14) 的解有下面的渐近形式:

$$\Phi^{(1)} \to E(\lambda, \tau)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4\lambda}\right)\xi + \frac{i}{2}\left(\lambda + \frac{1}{4\lambda}\right)\tau\right],$$

$$\Phi^{(2)} \to A(\lambda, \tau)\exp\left[-\frac{i}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4\lambda}\right)\xi + \frac{i}{2}\left(\lambda + \frac{1}{4\lambda}\right)\tau\right].$$

因此，所定义的函数 $A(\lambda)$，$B(\lambda)$ 使我们得到了 (14) 在连续谱中的散射数据. 这时从 (15) 我们得到

$$\frac{\partial A(\lambda, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial B(\lambda, \tau)}{\partial \tau} = -i\left(\lambda + \frac{1}{4\lambda}\right)B(\lambda, \tau).$$

这些公式确定散射数据随时间的演化. 解 Φ 作为 ξ 和 τ 的函数，即 $\Phi(\lambda, \xi, \tau)$，在整个 ξ，τ 平面上是唯一确定的. 十分明显，$\Phi(\lambda; x+t, t-x)$ 作为 x 的函数还满足系统 (3)，其中 (3) 带有的势 $u(x, t)$ 是方程 (2) 的解. 试问，当 $x \to -\infty$，$t = \text{const}$ 时，$\Phi(\lambda; x+t, t-x)$ 有什么样的渐近形式? 为了回答这一问题，我们要注意到这样一个定理: 给定一个充分光滑且当 $|\xi| \to \infty$ 时衰减的函数 $u(\xi, \tau)_{\tau=0}$

$=n(\xi)$, $u_2(\xi,\tau)_{\tau=0}=w(\xi)$ 作为方程 (2) 的初始条件，那么当 $\tau\to\pm\infty$ 时，方程 (2) 对应此初始条件的各种解都包含在光锥 $|\tau|>|\xi|$ 的内部. 这个定理是十分明显的. 正是由于这个原因，当 $\Phi(\lambda;\xi,\tau)$ 的渐近式从区域 $\xi\to-\infty$, $\tau=$ const 延拓到区域 $\xi=-\tau$, $\xi\to-\infty$ (即 $x\to-\infty$, $t=$ const) 时，我们才总是有 $u(\xi,\tau)=0$ 的区域. 因此当 $x\to-\infty$ 时

$$\Phi(\lambda;x,-x)=\begin{pmatrix}0\\ \exp(-i\lambda x)\end{pmatrix}$$

就等于上面系统 (3) 所引入的解 $\varphi(x,\lambda)$. 当 $\xi\to+\infty$, $x\to+\infty$ 时的情形也正是这样，即当 $\xi\to+\infty$ 时，由渐近形式

$$\phi^{(1)}\to\exp\left[\frac{i}{2}\left(\lambda-\frac{1}{4\lambda}\right)\xi-\frac{i}{2}\left(\lambda+\frac{1}{4\lambda}\right)\tau\right],\quad \phi^{(2)}\to 0$$

所确定的 (14) 的解 $\phi(\lambda;\xi,\tau)$ 是从系统 (3) 的解 $\phi(\lambda,x,t)$ 作简单的变量代换得到的. 这样以来，便存在以下定理：设 $u(\xi)=u(\xi,0)$, $w(\xi)=u_2(\xi,0)$ 为方程 (2) 的初始条件，$A(\lambda)$, $B(\lambda)$ 为问题 (14) 的对应 u, u_2 这些值的散射数据. 再设 $u(\xi,\tau)$ 是方程 (2) 具有上面所指出的初始条件的解；$u(x,0)=u(x,-x)$ 为方程 (1) 的初始条件，而 $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ 为系统 (3) 对应于此初始条件的散射数据. 如果 $u(\xi)$, $w(\xi)$ 为充分光滑且当 $|\xi|\to\infty$ 时为良好衰减的函数，那么就有 $a(\lambda)\equiv A(\lambda)$, $b(\lambda)\equiv B(\lambda)$, 问题 (14) 和 (3) 的分立谱相应特征也相等. 用平凡的变量代换，从方程 (9.11), (9.12) 便得到逆问题方程：

$$\tilde{\phi}(\lambda,\xi)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\lambda-\frac{1}{4\lambda}\right)\xi\right]$$

$$
=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{N}\frac{c_n\phi(\lambda_n,\xi)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\lambda_n-\frac{1}{4\lambda_n}\right)\xi\right]}{\lambda-\lambda_n}
$$

$$
+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\lambda')\phi(\lambda',\xi)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\lambda'-\frac{1}{4\lambda'}\right)\xi\right]}{\lambda'-\lambda+i0}, \quad (16)
$$

$$
\tilde{\phi}(\lambda_n,\xi)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\bar{\lambda}_n-\frac{1}{4\bar{\lambda}_n}\right)\xi\right]
$$

$$
=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\sum_{m}\frac{c_m\phi(\lambda_m,\xi)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\lambda_m-\frac{1}{4\lambda_m}\right)\xi\right]}{\bar{\lambda}_n-\lambda_m}
$$

$$
-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(\lambda)\phi(\lambda,\xi)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\lambda-\frac{1}{4\lambda}\right)\xi\right]d\lambda}{\lambda-\bar{\lambda}_n}. \quad (17)
$$

在 $\tilde{\phi}=\begin{pmatrix}-\bar{\phi}^{(2)}\\ \bar{\phi}^{(1)}\end{pmatrix}$ 的这些方程中，求和跑遍了 $A(\lambda)$ 的所有上半平面上的零点，其中 $R(\lambda)=B(\lambda)/A(\lambda)$，$C_n=B(\lambda_n)/A'(\lambda_n)$. $\phi(\lambda,\xi)$ 应理解为方程 (14) 具有以下渐近式的解，即当 $\xi\to+\infty$ 时，

$$
\phi^{(2)}\to 0,\ \phi^{(1)}\to\exp\left[\frac{i}{2}\left(\lambda-\frac{1}{4\lambda}\right)\xi\right].
$$

由于 (9.15)，散射数据满足熟知的限制：

$$
R(\lambda)=-\bar{R}(-\lambda); \quad (18)
$$

$-\bar{\lambda}_n$ 同 λ_n 一道是本征值；相应的 c_n 是复共轭的. 如果 $\sin u$ 和 u_2 作为 ξ 函数无限可微且当 $|\xi|\to\infty$ 时连同它们的各阶导数一道衰减，那么，当 $\lambda\to\infty$ 时反射系数 $R(\lambda)$ 要比 $1/\lambda$ 的任何幂次衰减得更快. 这一事实无论对于势具有更一般条件的系统 (3) 来说，还是对系统 (14)，都是成立的. 而且对系统 (14) 来说，在所指出的条件下，当 $\lambda\to 0$ 时 $R(\lambda)$ 比 λ

的任何幂次都下降得更快．容易证实这点，在 (14) 中作代换

$$\psi = e^{i\frac{u}{2}\sigma_1}\psi' = \begin{pmatrix} \cos\frac{u}{2} & i\sin\frac{u}{2} \\ i\sin\frac{u}{2} & \cos\frac{u}{2} \end{pmatrix}\psi', \tag{19}$$

并注意到 ψ' 满足方程

$$\psi'_\xi = \frac{1}{8i\lambda}\sigma_3\psi' - \frac{i}{4}(u_\xi + u_\tau)\sigma_1\psi' + \frac{i\lambda}{2}e^{-\frac{iu}{2}\sigma_1}\sigma_3 e^{i\frac{u}{2}\sigma_1}\psi', \tag{20}$$

其中

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

从 (19)，(20) 同样可以看到，当 $\lambda \to 0$ 时

$$\tilde{\psi}(\lambda, \xi)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4\lambda}\right)\xi\right] \to \begin{pmatrix} i\sin\frac{u}{2} \\ \cos\frac{u}{2} \end{pmatrix}(-1)^{u(+\infty)/2\pi}.$$

我们把此表达式同 (16) 比较得到

$$\cos\frac{u(\xi)}{2} = (-1)^{u(+\infty)/2\pi} \times \left[1 - \sum_n \frac{c_n}{\lambda_n}\psi^{(2)}(\lambda_n, \xi)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\lambda_n - \frac{1}{4\lambda_n}\right)\xi\right] - \frac{1}{2\pi i}\int\frac{R(\lambda)}{\lambda}\psi^{(2)}(\lambda, \xi)\exp\left[\frac{i}{2}\left(\lambda - \frac{1}{4\lambda}\right)\xi\right]d\lambda\right]. \tag{21}$$

公式 (21) 能按逆问题方程 (16)，(17) 的解返回到势．

方程 (2) 写成标准的拉格朗日形式

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\delta L}{\delta u_\tau}-\frac{\delta L}{\delta u}=0,$$

式中

$$L=\frac{1}{\gamma}\int d\xi\left(\frac{u_\tau^2}{2}-\frac{u_\xi^2}{2}+\cos u-1\right),$$

显然，方程 (2) 也是哈密顿方程．它的哈密顿量是

$$H=\int d\xi u_\tau\frac{\delta L}{\delta u_\tau}-L$$

$$=\int d\xi\left[\frac{\gamma w^2}{2}+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{u_\xi^2}{2}+1-\cos u\right)\right], \qquad (22)$$

式中 $w=\delta L/\delta u_\tau$ 为 $u(\xi)$ 的正则共轭变量．恒量 γ 起着相互作用常数作用．系统存在哈密顿形式

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\delta H}{\delta w}, \qquad \frac{\partial w}{\partial \tau}=-\frac{\delta H}{\delta u}. \qquad (23)$$

我们指出，在散射数据语言中的正则变量(这种变量同上面所研究的例子一样) 原来是系统 (22), (23) 的作用一角变量．从公式

$$a(\lambda)=W(\psi(\lambda),\varphi(\lambda)),\ b(\lambda)=-W(\tilde{\psi}(\lambda),\varphi(\lambda)) \qquad (24)$$

出发，同平常一样，可以算出散射数据的变分导数．同时，由于问题 (14) 包含 u_ξ，所以为了方便变换成函数

$$\varphi'=\exp\left(-\frac{i}{4}u\sigma_1\right)\varphi, \qquad \psi'=\exp\left(-\frac{iu}{4}\sigma_1\right)\psi,$$

其中 φ', ψ' 是下面方程的解:

$$\varphi'_\xi=\left[-\frac{iu_\tau}{4}\sigma_1+\frac{i\lambda}{2}\exp\left(-\frac{iu}{4}\sigma_1\right)\sigma_1\exp\left(\frac{iu}{4}\sigma_1\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{8i\lambda}\exp\left(i\frac{u}{4}\sigma_1\right)\sigma_3\exp\left(-i\frac{u}{4}\sigma_1\right)\right]\varphi'. \qquad (25)$$

因 $\det\exp\left(i\frac{u}{4}\sigma_1\right)=1$，故 $a(\lambda)$ 和 $b(\lambda)$ 用带"撇"变量的表达式同 (24) 相同．其次，我们应用标准的讨论并从 φ'，ψ' 变回到 φ，ψ 得到

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u_\tau}=-\frac{i}{4}W(\psi,\ \sigma_1\varphi)=-\frac{i}{4}(\psi_1\varphi_1-\psi_2\varphi_2),$$

$$\frac{\delta b(\lambda)}{\delta u_\tau}=\frac{i}{4}(\tilde{\psi}_1\varphi_1-\tilde{\psi}_2\varphi_2), \tag{26}$$

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u}=-\frac{i}{2}\left[\left(\frac{i\lambda}{2}-\frac{\cos u}{8i\lambda}\right)(\psi_1\varphi_1+\psi_2\varphi_2)\right.$$
$$\left.+\frac{\sin u}{8\lambda}(\varphi_2\psi_1+\varphi_1\psi_2)\right],$$

$$\frac{\delta b(\lambda)}{\delta u}=\frac{i}{2}\left[\left(\frac{i\lambda}{2}-\frac{\cos u}{8i\lambda}\right)(\tilde{\psi}_1\varphi_1+\tilde{\psi}_2\varphi_2)\right.$$
$$\left.+\frac{\sin u}{8\lambda}(\varphi_2\tilde{\psi}_1+\varphi_1\tilde{\psi}_2)\right].$$

现在我们来计算泊松括号：

$$\{a(\lambda),\ b(\lambda')\}=\gamma\int d\xi\left(\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u}\frac{\delta b(\lambda')}{\delta u_\tau}\right.$$
$$\left.-\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u_\tau}\frac{\delta b(\lambda')}{\delta u}\right). \tag{27}$$

我们这里考虑了 $\delta/\delta W=\gamma\delta/\delta u_\tau$． 借助于直接的但又是繁琐的计算可以证明，(27) 的被积表达式是全微商，即

$$\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u}\frac{\delta b(\lambda')}{\delta u_\tau}-\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u_\tau}\frac{\delta b(\lambda')}{\delta u}$$
$$=\frac{1}{16}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\lambda-\lambda'}{\lambda+\lambda'}Z_2-\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda-\lambda'}Z_1\right),$$

式中

$$Z_1(\psi(\lambda),\ \varphi(\lambda);\ \tilde{\psi}(\lambda'),\ \varphi(\lambda'))$$
$$=(\psi_1(\lambda)\tilde{\psi}_2(\lambda')-\psi_2(\lambda)\tilde{\psi}_1(\lambda'))(\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda')$$

$$
-\varphi_2(\lambda)\varphi_1(\lambda')),
$$

$$
Z_2(\psi(\lambda),\ \varphi(\lambda);\ \tilde{\psi}(\lambda'),\ \varphi(\lambda')) = (\psi_1(\lambda)\tilde{\psi}_1(\lambda') - \psi_2(\lambda)\tilde{\psi}_2(\lambda'))(\varphi_1(\lambda)\varphi_1(\lambda') - \varphi_2(\lambda)\varphi_2(\lambda')).
$$

对其它的括号也有类似的表达式:

$$
\frac{\delta a(\lambda)}{\delta u}\frac{\delta a(\lambda')}{\delta u_\tau} - \frac{\delta a(\lambda)}{\delta u_\tau}\frac{\delta a(\lambda')}{\delta u}
= -\frac{1}{16}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\lambda-\lambda'}{\lambda+\lambda'}Z_2(\psi(\lambda),\ \varphi(\lambda);\ \psi(\lambda'),\ \varphi(\lambda')) - \frac{\lambda+\lambda'}{\lambda-\lambda'}Z_1(\psi(\lambda)\varphi(\lambda);\ \psi(\lambda')\varphi(\lambda')\right]
$$

等等. 完成 (27) 中的积分,得到

$$
\frac{1}{\gamma}\{a(\lambda),\ b(\lambda')\} = \frac{1}{4}\frac{\lambda\lambda'}{\lambda^2-\lambda'^2}a(\lambda)b(\lambda') - \frac{\pi i\lambda}{8}a(\lambda)b(\lambda')\delta(\lambda-\lambda') + \frac{\pi i\lambda}{8}a(\lambda)b(\lambda')\delta(\lambda+\lambda'), \tag{28}
$$

$$
\{a(\lambda),\ a(\lambda')\} = 0 \quad 等等
$$

利用这些表达式及对称性 $\bar{a}(\lambda) = a(-\lambda)$, $\bar{b}(\lambda) = -b(-\lambda)$, 不难验证,变量

$$
P_\lambda = \frac{4}{\pi\lambda\gamma}\ln\frac{1}{|a(\lambda)|^2},\quad Q_\lambda = \arg b(\lambda),\quad \lambda > 0,
$$

是正则共轭的. 把公式 (28) 延拓到复平面上

$$
\{a(\lambda),\ b(\lambda')\} = \frac{\gamma}{16}\left(\frac{\lambda+\lambda'}{\lambda-\lambda'} - \frac{\lambda-\lambda'}{\lambda+\lambda'}\right)a(\lambda)b(\lambda')
$$

并考虑到用关系式

$$
\delta\lambda_n = -\frac{1}{a'(\lambda_n)}\delta a
$$

把 $a(\lambda)$ 的零点位置的改变 $\delta\lambda_n$ 同变分 δa 联系起来,得到

$$\{\lambda_n, b_m\} = \frac{\gamma}{8}\lambda_n b_n \delta_{nm},$$

式中 $b_n = b(\lambda_n)$. 因此,分立谱部分的正则变量是

$$p_n = \ln\lambda_n,\ q_n = -\frac{8}{\gamma}\ln b_n,\ \mathrm{Re}\lambda_n \geqslant 0,\ \mathrm{Im}\lambda_n > 0.$$

如果 $\mathrm{Re}\lambda_n \neq 0$,这些变量是复的. 为了方便,变到实的变量

$$p_n = \ln|\lambda_n|,\ q_n = -\frac{8}{\gamma}\ln|b_n|\ (\mathrm{Re}\lambda_n = 0), \tag{29}$$

$$n_k = 4\ln|\lambda_k|,\ \varphi_k = -\frac{4}{\gamma}\ln|b_k|, \tag{30}$$

$$\eta_k = \frac{16}{\gamma}\arg\lambda_k,\ \phi_k = \arg b_k\left(0 < \arg\lambda_k < \frac{\pi}{2}\right).$$

变量集合 (29) 属于孤子(反孤子)的. 应注意,p_n,q_n (29) 并没有完全确定这部分谱,这是由于它们对于孤子的荷不敏感,因为正象我们知道的那样,孤子的荷是由 b_n 的符号确定的. 因此 (29) 应该加上动力学不存在的而起源于拓扑的这些特征. 但变量 (30) 却完全描述了双重孤子.

现在我们通过这些新变量来表示哈密顿量. 注意到下面事实后,不难做到这一点,即直接从 (14) 得到,$\ln a(\lambda)$ 的展开式头一项在 λ 无穷远处及 $\lambda = 0$ 的邻域内分别为下面形式:

$$\ln a(\lambda) = -\frac{i}{8\lambda}\int\left[\frac{(u_\xi - u_\tau)^2}{2} + (1 - \cos u)\right]d\xi + 0\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),\quad \lambda\to\infty,$$

$$\ln a(\lambda) = \frac{i\lambda}{2}\int\left[\frac{(u_\xi + u_\tau)^2}{2} + (1 - \cos u)\right]d\xi + 0(\lambda^2),\quad \lambda\to 0.$$

其次,我们按变量 P_λ,p_n 反求 $\ln a(\lambda)$,得到

$$H = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{4\lambda} + \lambda\right)P_{\lambda}d\lambda + \sum \frac{2}{\gamma}\left(e^{-p_k} + 4e^{p_k}\right)$$

$$+ \sum \frac{4}{\gamma}\sin\frac{\gamma\eta_k}{16}\left(e^{-\frac{\eta_k}{4}} + 4e^{\frac{\eta_k}{4}}\right). \qquad (31)$$

场的动量在新变量中写成下面形式：

$$P = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{4\lambda} - \lambda\right)P_{\lambda}d\lambda + \sum \frac{2}{\gamma}\left(e^{-p_k} - 4e^{p_k}\right)$$

$$+ \sum \frac{4}{\gamma}\sin\frac{\gamma\eta_k}{16}\left(e^{-\frac{\eta_k}{4}} + 4e^{\frac{\eta_k}{4}}\right).$$

在同我们的动力系统相联系的粒子语言里，这些公式有简单的解释。当 λ 固定时，变量 P_{λ}，Φ_{λ} 构成一对"粒子数-位相"类型的正则变量，因此 P_{λ} 可以解释为粒子密度，$(1/4\lambda - \lambda)P_{\lambda}$ 可以解释为动量，而 $(1/4\lambda + \lambda)P_{\lambda}$ 可解释为相应的能量．这样一来，公式 (31)，(32) 第一部分的头一项乃是带有单位质量粒子的能量和动量的贡献． 第二个加数(对应于孤子的贡献)乃是带有质量 $8/\gamma$ 的粒子的贡献，即孤子的质量等于 $8/\gamma$．最后，(31)，(32) 的最后一个加数对应双重孤子，它们的质量在零到 $16/\gamma$ 间隔内变动，与它们的振幅有关．

第二章　KdV 方程的周期性解

正象在引论中所提到的那样，按 x 成周期性的定常简单波类型的解 $u(x-ct)$（这种解也叫“极浅水波”（cnoidal waves））是在十九世纪浅水理论中发现的．事隔很久，即在二十世纪五十年代，在等离子体理论中也发现了这种类型的波．在 60 年代对按 x 成周期性初始条件的 KdV 方程的解曾作过数值试验，结果表明这种解随时间成准周期性动力学形式变化．除此之外，周期性问题具有无穷多个守恒律（参看第一章 § 5）．所有这一切都表明周期性边界条件的哥西问题是完全可积的．可是，由于数学上的特点，KdV 的周期性问题比衰减快的情形更难．特别是，按 x 成周期性的精确解除极浅水波解外，其它的很长时间连一个都不知道．应用逆散射问题方法的类似理论也没有成功．但在 1974 年，终于找到了周期性问题的解（参看综述评论文章 [6]），这需要对具有周期性势的一维薛定谔方程理论作出重大发展，同时还要求利用一系列物理上不习惯应用的数学工具．

§ 1. 带有周期势的薛定谔方程与 GGKM 方程类似的周期性方程

这节将从薛定谔方程理论出发来阐述我们所必须的基本知识，并在周期情形中引进同 GGKM 方程（即借助于 KdV 所得到的穿透系数和反射系数的动力学方程）（参看（1.2.3））相类似的方程．从这种方程多少将会看出（同衰减快情形相比）周期性问题的困难性．

同早先一样，设 $L=-d^2/dx^2+u(x)$ 是一维薛定谔算子，但势 u 存在周期 T: $u(x+T)=u(x)$. 如果 $u_t=6uu_x-u_{xxx}$，那么就 KdV 方程对于时间动力学的 Lax 表象 (1.2.6)

$$\dot{L}=[A, L]$$

来说(其中势 $u(x,t)$ 对时间 t 的关系是把 t 看作参数)，在周期情形中仍保持其原来意义. 下面让我们研究算子 L 的本征值问题:

$$L\psi=E\psi. \tag{1}$$

为了方便，我们用下面两种方法之一来选取方程 (1) 解的基底:

$$L\varphi_{\pm}=E\varphi_{\pm},\ \varphi_{\pm}(x_0)=1,\ \varphi'_{\pm}(x_0)=\pm ik,\ k^2=E; \tag{2'}$$

$$Lc=Ec,\ Ls=Es,\ c(x_0)=1,\ c'(x_0)=0,\ s(x_0)=0,\ s'(x_0)=1. \tag{2''}$$

其中这两种基底在点 x_0 处都是归一化的. 基底 (2′) 和 (2″) 我们将分别用 $\varphi_{\pm}(x, x_0, E)$ 和 $c(x, x_0, E)$, $s(x, x_0, E)$ 来表示. 同平常一样，考虑周期的平移 (translation) 算子，这种算子同薛定谔算子L(势 u 存在周期 T) 是对易的:

$$\hat{T}: \psi(x)\to\psi(x+T),\quad \hat{T}L=L\hat{T}. \tag{3}$$

在数学文献中，平移算子 $\hat{T}$ 通常叫“单值 (monodromy) 算子”. 在方程 (1) 解的任何一个基底中，算子 $\hat{T}$ 将写成二阶矩阵形式:

$$\begin{aligned}&\hat{T}\varphi_+=a\varphi_++b\varphi_-,\ \hat{T}\varphi_-=c\varphi_++d\varphi_-,\\&\hat{T}c=\alpha_{11}c+\alpha_{12}s,\qquad \hat{T}s=\alpha_{21}c+\alpha_{22}s.\end{aligned} \tag{4}$$

当 k 为实数时(这时 $k^2=E$)，我们有

$$\varphi_-=\bar{\varphi}_+,\quad c=\bar{b},\quad d=\bar{a},\quad \hat{T}=\begin{pmatrix}a & b\\ \bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

当 E 为实数时，对于基底 (2) 来说，矩阵 $\hat{T}=(\alpha_{ij})$ 将是实的（总是假定势 u 是实的）. 众所周知，任何一对解的朗斯基行列式等于常数，由此得出

$$\det\hat{T}=\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}=ad-bc=1. \tag{6}$$

当 k 为实数时，借助于 (5) 得到

$$|a|^2-|b|^2=1. \tag{7}$$

一般来说，矩阵 $\hat{T}$ 依赖于初始点 x_0 和 E（或 k），$\hat{T}=\hat{T}(x_0, E)$.

在具有周期性势的薛定谔算子理论中，一个重要的量是平移矩阵的迹：

$$\mathrm{Sp}\hat{T}=\alpha_{11}+\alpha_{22}=a+d. \tag{8}$$

当 k 为实数时，我们有 $d=\bar{a}$，所以

$$\mathrm{Sp}\hat{T}=a+d=a+\bar{a}=2a_R,\quad a=a_R+ia_I. \tag{9}$$

我们将总是用 $\exp(\pm ipT)$ 来表示矩阵 $\hat{T}$ 的本征数，其中 T 为周期；数 $p=p(E)$ 称作"准动量". 因 $\det\hat{T}=1$，故本征数用迹 $\mathrm{Sp}\hat{T}$ 来表示，从而它有下面形式：

$$\begin{gathered}\exp(\pm ipT)=a_R\pm\sqrt{a_R^2-1},\\ 2\cos(pT)=\mathrm{Sp}\hat{T}=2a_R=\alpha_{11}+\alpha_{22}.\end{gathered} \tag{10}$$

严格来说，上面这些公式描述 k 为实值的情形，不过，甚至当 E 为复值时，我们也将总是用 a_R 来表示量

$$\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\hat{T}=\frac{1}{2}(\alpha_{11}+\alpha_{22}).$$

让我们回忆一下，如果本征函数 $\psi_\pm(x)$ 同时是与 L 对易的平移算子 $\hat{T}$ 的本征向量，即

$$\begin{gathered}L\psi_\pm=E\psi_\pm,\\ \hat{T}\psi_\pm=\exp(\pm ipT)\psi_\pm,\end{gathered} \tag{11}$$

那么便称它为布洛赫 (Bloch) 函数（或佛罗开 (Floquet) 函数）. 也常这样说，如果准动量 $p(E)$ 是实的或者 $|\exp(ipT)|=1$,

那么布洛赫本征函数 $\psi_{\pm}(x, E)$ 是属于算子 L 在直线上的布洛赫谱(佛罗开函数处在准许带或稳定带之中).

从公式 (10) 可看出，布洛赫谱带(准许带，稳定带)由下面方程给出:

$$\left|\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\hat{T}\right| = |a_R| \leqslant 1. \tag{12}$$

在实轴 E 上，由条件 $|a_R| > 1$ 给出禁带(或不稳定带).

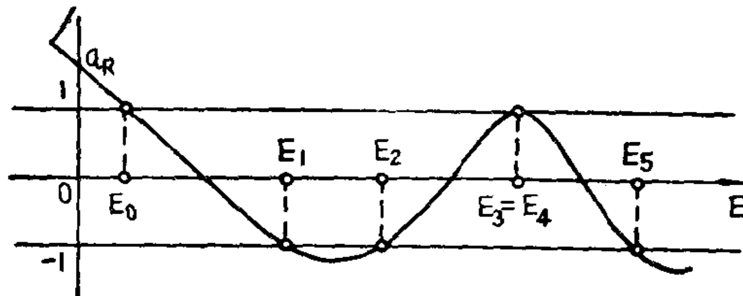


图 2. 准许带 $[E_0 E_1]$, $[E_2 E_5]\cdots$, 其中 $a_R \leqslant 1$.

虽然矩阵 $\hat{T}$ 依赖于 x_0, E, 但它的迹 $\operatorname{Sp}\hat{T} = 2a_R$ 却只依赖于 E, 从而迹的典型图形才有图 2 所示的样子. 点 E_0, E_1, E_2, $\cdots$构成准许带的边缘. 但可能有这样的情形，即禁带聚集成一点，从而禁带消失了(例如，在图 2 中 $E_3 = E_4$). 在这种情形中，点 $E_3 = E_4$ 已经不是带的边缘，而线段 $[E_2, E_5]$ 合成一个准许带. 这类带的一个平常例子是由常数势 $u = \text{const}$ 产生的；除 E_0 外，所有带的边缘都成对儿地合并起来，这样就只出现一个准许带 $E \geqslant E_0$ (图 3).

准许带和禁带的边缘 E_i 都满足如下条件: $|a_R| = 1$ 或者 $\exp(\pm ipT) = \pm 1$. 由于这个原因，当 $E = E_i$ 时布洛赫本征函数 $\psi(x, E_i)$ 便满足下面方程: $\hat{T}\psi = \pm\psi$. 这意味着，当 $E = E_i$ 时，函数 ψ 是以 T 为周期或 $2T$ 为周期的周期性函数. 而当 $E = E_i$ 时，矩阵 $\hat{T}$ 本身还存在相同的本征值 $\exp(ipT) = \exp(-ipT)$, 其中 $pT = 0, \pi$.

在非简并情形中，当 $E=E_i$ 时矩阵 $\hat{T}$ 简化为约当(Jordan)原胞：它有两个相同的本征值，不过只有一个本征向量．在这种情形之下，$b(x_0, E)\neq 0$ 及 $a_R=\pm 1$．实际上，在非简并情形中，能级 E_i 是能带的端点．

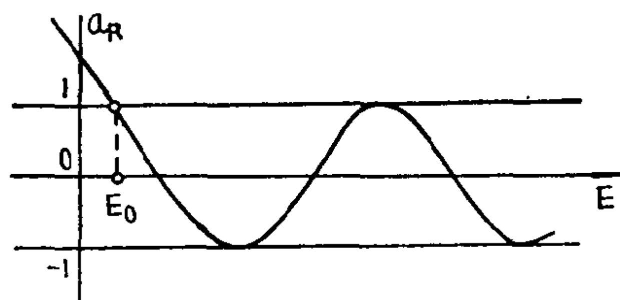


图 3．当 $u=\text{const}$ 时 $a_R(E)$ 的图形；当 $E\geqslant E_0$ 时，a_R 总是满足$|a_R|\leqslant 1$．

如果当 $E=E_i$ 时，矩阵 $\hat{T}$ 是对角的或者

$$\hat{T}=\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

其中 $b(x_0, E_i)\equiv 0$，那么这种能级 E_i 便是二重简并的，因而不是准许带的端点．我们这里没有证明这些基本事实，因为从任何一本具有周期性系数的线性方程理论教科书中或者固体理论教科书[18]中都能很好地了解到这些基本事实．

让我们注意到，矩阵 $\hat{T}(x_0, E)$ 是类似于量子力学跃迁矩阵的周期性矩阵，在第一章 §1 中对衰减快的势 $u(x)$ 曾利用到这种矩阵 $\hat{T}$．其实，假设 $T\to\infty$，$x_0\to-\infty$，$x_0+T\to\infty$，而当 $T\to\infty$ 时，势 $u(x)$ 趋于衰减快的势．于是，基底 (φ_+, φ_-) 在点 x_0 和 x_0+T 处便趋于这样的基底，即当 $x\to\pm\infty$ 时这种基底有两个指数渐近形式 $\exp(\pm ikx)$．所以从 x_0 到 x_0+T 的跃迁矩阵 $\hat{T}$，当 $T\to\infty$ 时，就变成第一章在按 x 衰减快的函数类中 KdV 的解所利用的散射矩阵．对于 KdV 衰减快的解 $u(x,t)$ 我们曾在第一章 §2 中得到了 Gardner-Green-Kruskal-Miura (GGKM) 方程：

$$\dot{a}=0, \quad \dot{b}=8ik^3b.$$

如果关于 x 的周期性势 $u(x,t)$ 随时间变化服从 KdV 或者任何一个高阶 KdV 的话，那么现在我们同样对矩阵 $\hat{T}(x_0,t,E)$ 来引入这种类似于 GGKM 方程的周期性方程. 让我们来研究借助任何一个高阶 KdV 动力学的 Lax 方程:

$$\dot{L}=[L,A],$$

式中 $A=\sum_{i=0}^{n} c_i A_{n-i}-2n+1$ 阶算子，这种算子的系数依赖于 $u, u', u'', \cdots$. 对原 KdV 来说，算子 $A=A_1$ 的具体形式为 (1.2.5). 我们来考虑方程 (1) 的解的任何一个基底 (2′) 或 (2″). 在基底 (2′) 中，同 (1.2.4) 类似有

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_+ &= -A\varphi_+ + \lambda\varphi_+ + \mu\varphi_-, \\ \dot{\varphi}_- &= -A\varphi_- + \gamma\varphi_+ + \delta\varphi^-. \end{aligned} \tag{13}$$

当 $k(k^2=E)$ 为实数时，则有 $\gamma=\bar{\mu}$, $\delta=\bar{\lambda}$ 及 $\lambda+\delta=0$, 这是因为 $\varphi_-=\bar{\varphi}_+$ 而 A 为实的算子. 其实，从方程 $\dot{L}=[L,A]$ 及 $L\varphi_\pm=E\varphi_\pm$ 我们得到下面等式:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}(L-E)\varphi_\pm = \dot{L}\varphi_\pm + (L-E)\dot{\varphi}_\pm \\ &= (LA-AL)\varphi_\pm + (L-E)\dot{\varphi}_\pm \\ &= (L-E)(A\varphi_\pm + \dot{\varphi}_\pm), \end{aligned}$$

此等式就相当于方程 (13).

现在考虑这样一个矩阵 $\Lambda(x_0,E)$:

$$\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \tag{14}$$

把与 GGKM 方程类似的周期性方程写成下面形式:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}=[\Lambda,\hat{T}]=\Lambda\hat{T}-\hat{T}\Lambda. \tag{15}$$

包含在此方程中的矩阵 $\Lambda(x_0,E)$ 是这样确定的: 从方程

(13) 中作代换 $x=x_0$，其中当 $x=x_0$ 时 $\dot{\varphi}_+=\dot{\varphi}_-=(\dot{\varphi}_+)'=(\dot{\varphi}_-)'=0$，再按基底 φ_+，φ_- 的定义我们得到

$$
\begin{aligned}
&(A\varphi_+)_{x=x_0}=\lambda+\mu,\ (A\varphi_-)_{x=x_0}=\gamma+\delta,\\
&\left(\frac{d}{dx}A\varphi_+\right)_{x=x_0}=ik(\lambda-\mu),\ \left(\frac{d}{dx}A\varphi_-\right)_{x=x_0}=ik(\gamma-\delta).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

又因微分算子 A 的系数是用 $u, u', u'', \cdots$，来表示的，这样公式 (16) 便用 $u(x_0), u'(x_0), u''(x_0), \cdots$ 给出矩阵 Λ 的表达式. 在基底 (2″) 中确定矩阵 Λ 也可作类似地计算，这时矩阵 Λ 同样将是 E 的多项式函数（在基底 (2′) 中矩阵 $k\Lambda$ 是 k 的多项式函数).

为了推出方程 (15)，在点 x_0+T 处我们应用平移算子 $\hat{T}$ 来利用同样的方程 (13). 我们用 φ 来表示对 (φ_+,φ_-)，从而 $A\varphi=(A\varphi_+,A\varphi_-)$，$\dot{\varphi}=(\dot{\varphi}_+,\dot{\varphi}_-)$. 采用矩阵形式我们有

$$
\begin{aligned}
&\hat{T}(\dot{\varphi})=-\hat{T}A\varphi+\hat{T}\Lambda\varphi,\\
&(\hat{T}\varphi)'=-A(\hat{T}\varphi)+\Lambda(\hat{T}\varphi),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

后一等式是因为对基底 $\hat{T}\varphi$ 来说，方程 (13) 同样成立. 同时算子 A 的系数是通过带有常数系数的 $u, u', u'', \cdots$ 来表示的，因此我们得到

$$
\begin{aligned}
&\hat{T}A\varphi=A\hat{T}\varphi,\\
&(\hat{T}\varphi)'=\frac{\partial\hat{T}}{\partial t}\varphi+\hat{T}\dot{\varphi}=\frac{\partial\hat{T}}{\partial t}\varphi-\hat{T}A\varphi+\hat{T}\Lambda\varphi,\\
&\frac{\partial\hat{T}}{\partial t}\varphi=(\Lambda\hat{T}-\hat{T}\Lambda)\varphi.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

后一个等式等价于方程 (15). 如果势 $u(x)$ 是衰减快的，那么当 $x\to\pm\infty$ 时，$x_0=-\infty$，$x_0+T=+\infty$，$T=\infty$，则 $u\to0$，$u'\to0$，$\cdots$，$u^{(n)}\to0$. 因此对衰减快的势来说，矩

阵 Λ 原来是常数矩阵. 由于这个原因, GGKM 方程 (15) 才能立即积分出来. 例如对基本的 KdV 方程我们有(基底 (2′)):

$$
\begin{aligned}
A &= 4\frac{d^3}{dx^3} - 3\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right), \\
\Lambda &= \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \\
\lambda &= ik^{-1}\left(-\frac{u''}{2} + u^2 - 4k^4\right), \qquad (19) \\
\mu &= u' + ik^{-1}\left(\frac{u''}{2} - u^2 - 2k^2u\right);
\end{aligned}
$$

如果 $u(x_0) = u'(x_0) = \cdots = u^{(n)}(x_0) = 0$, 那么

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} -4ik^3 & 0 \\ 0 & +4ik^3 \end{pmatrix}
$$

从而方程 (15) 便简化为 (1.2.3) 的形式:

$$
\dot{a} = 0, \quad \dot{b} = 8ik^3b.
$$

因此, 正是由这种情况得到了衰减快的势的情形. 在周期情形中我们得到了更普遍的方程 (15), 其中矩阵 Λ 是 $u(x_0)$, $u'(x_0)$, $\cdots$ 的复杂函数, 这种方程已经不能积分, 不管这种方程在怎样简单情况下也都如此. 在基底 (2″) 中, 矩阵 Λ 总是 E 的多项式. 对 KdV Λ 有下面形式

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} -u' & u'' - 2u^2 - 2uE + 4E^2 \\ -2(u + 2E) & u' \end{pmatrix}. \qquad (19')
$$

矩阵 $\hat{T}$ 的迹是方程 (15) 的积分. 其实, 这一事实是从 (15) 的右边具有对易子的形式得到的, 又因为 $1/2\mathrm{Sp}\hat{T} = a_R$ 决定算子 L 的布洛赫谱, 于是整个这种谱都保持守恒(即全部带的边缘 E_i 保持不变). 从而这个积分的集合相当于早先所找到的 Kruskal 守恒律(参看第一章 § 5), 这是因为带的端点集合

完全确定了函数 $a_R(E)$，这里的诸端点 E_i 由方程 $a_R^2=1$ 来确定，如果所有简并度都等于 1 的话。

问题是，复变量 E 的整函数 $a_R^2(E)$ 含有 E 的 $\frac{1}{2}$ 幂次，即按模 $|a_R^2(E)|<\text{const}\cdot\exp(\alpha\sqrt{E})$ 来估计。因此这种函数完全由指定简并度的 $a_R^2=1$ 值的集合借助展成无穷积的形式来确定。

由此可见，尽管与 GGKM 方程类似的周期性方程 (15) 将会在一系列情形中用到，但与 GGKM 程序直接类似的程序在周期情形中并没有产生实质性的结果。

让我们再引进矩阵 $\hat{T}$ 的一个有用的方程。因矩阵 $\hat{T}$ 依赖于参数 x_0 并且当 x_0 改变时它的本征值不变，于是可写成

$$\frac{\partial\hat{T}}{\partial x_0}=[Q,\hat{T}],\tag{20}$$

式中矩阵 Q 依赖于 $u(x_0)$, $u'(x_0)$, $\cdots$, E. 在基底 (2′) 和 (2″) 中，简单地得到矩阵 Q 的以下公式：

$$\begin{aligned}&\text{基底 (2″)}:\quad Q=\begin{pmatrix}0 & E-u\\ -1 & 0\end{pmatrix},\\ &\text{基底 (2′)}:\quad Q=ik\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\frac{iu}{2k}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{21}$$

§2. 高阶 KdV 的定态问题. KdV 精确解的寻找方法

正象在前节曾指出的那样，对于可积的周期性问题来说，与 GGKM 方程类似的周期性方程 (1.15) 同衰减快的情形有所不同，它没有给出重大的结果。因此，在寻找 KdV 的精确解时，我们得利用别的方法。在第一章曾引入所谓“高阶 KdV 方程”，它们同样是用薛定谔算子的逆散射问题方法来积分的(参看 (1.6.1))。所有这些方程都有下面形式：

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=0}^{n} c_j \frac{\delta I_{n-j}}{\delta u(x)}\right), \quad c_0 = 1, \tag{1}$$

式中 I_{n-j} 是在第一章 § 5 中所指出的 KdV 方程的 Kruskal 积分(守恒律). 按照第一章 § 6，所有这些方程乃是具有无限多个自由度的彼此相互对易的哈密顿系统. 这些方程同样允许 Lax 表象:

$$\dot{L} = [L, A], \tag{2}$$

式中 $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x), \quad A = A_n + \sum_{j=1}^{n} A_{n-j}c_j,$

c_j 是常数.

我们建立 KdV 精确解的程序是这样的: 先求出下面的任何一个高阶 KdV 的所有定态解:

$$\frac{\delta I_n}{\delta u} + c_1 \frac{\delta I_{n-1}}{\delta u} + \cdots + c_n \frac{\delta I_0}{\delta u} = \text{const} = -c_{n+1}. \tag{3}$$

然后从方程 (3) 所找到的这些解中取其中的任何一个作为原 KdV 的初始条件. 这时我们再利用下面事实: 从这一初始函数出发按 KdV 方程随时间移动，在经过一段时间以后的任何一个时刻，将重新得到这种类型的函数，即这种函数是方程 (3) 的带有同样常数 $c_1, \cdots, c_n, c_{n+1}$ 的解. 因此为了实现这一程序，必须充分地求解定态方程 (3)，从而借助于 KdV 求出这些函数 $u(x)$ 对时间 t 的依赖关系.

用动力学系统语言来说，任何一个高阶 KdV 方程，使我们在所有函数 $u(x)$ 的空间中确定一个该空间的单参数变换群，同时所有这些群都成对地对易. 所以任何一个高阶 KdV 的定态点(解)的总体(集合)相对所有其余的高阶 KdV (其中包括原 KdV) 都是不变量.

作为最简单的例子，让我们研究 $n = 1$ 的情形. 这时方程 (3) 有下面形式:

$$\frac{\delta I_1}{\delta u}+c_1\frac{\delta I_0}{\delta u}=-c_2, \tag{4}$$

式中

$$I_0=\int\frac{u^2}{2}dx, \quad I_1=\int\left(\frac{u'^2}{2}+u^3\right)dx.$$

因此方程 (4) 具有下面形式:

$$u''=\frac{\partial}{\partial u}\left(u^3+\frac{c_1}{2}u^2+c_2u\right). \tag{5}$$

这种方程的解是维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 椭圆函数:

$$x-x_0=\int\frac{du}{\sqrt{2u^3+c_1u^2+2c_2u+d}}. \tag{6}$$

KdV 本身有下面形式:

$$\dot{u}=6uu'-u'''=\left(\frac{\delta I_1}{\delta u}\right)'.$$

函数 $u(x-ct)$ 当 $c=c_1$ 时是 KdV 方程的解. 我们得到了通常的极浅水波.

$n=2$ 的情形就较复杂了. 方程 (3) 将有四阶. 它的基本积分是很困难的.

以后将阐述, KdV 的所有衰减快的多个孤子解 $u(x,t)$ 按 x 满足方程 (3) 的其中之一. 结果得到方程 (3) 的几乎所有解都按 x 成周期性或准周期性变化. 所以 KdV 的相应解是多个与孤子解类似的周期性和准周期性函数 (参看本章后面的 § 10). 所有方程 (3) 都具有变分导数形式:

$$\frac{\delta I}{\delta u}=0, \tag{7}$$

式中 $I=I_n+c_1I_{n-1}+\cdots+c_nI_0+c_{n+1}I_{-1}$, 其中 $I_{-1}=\int udx$. 考虑到拉格朗日 I_n 的非简并性, 由此得到方程 (3) 按 x 的哈密顿形式:

$$p_i'=\partial H/\partial q_i, \; q_i'=-\partial H/\partial p_i, \; i=1,\cdots,n,$$

式中

$$q_i = u^{(i-1)}, \quad p_i = \sum_{s=0}^{n-i} \left(\frac{d^s}{dx^s} \frac{\partial Q}{\partial u^{(i+s)}} \right) (-1)^s, \tag{8}$$

而哈密顿量H有下面形式：

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^{n} p_i u^{(i)} - Q, \tag{9}$$

并且 $dH/dx \equiv u' \delta I / \delta u$.

下面我们来建立方程（7）按 x 的积分. 根据在第一章§6中所建立的对 KdV 的 Kruskal 积分的对合性，我们有

$$\{I, I_i\} = 0, \ i = 0, 1, \cdots, n-1,$$

或者，如果

$$I_i = \int P_i(u, u', \cdots, u^{(i)}) dx,$$

$$I = \int (P_n + c_1 P_{n-1} + \cdots + c_{n+1} u) dx = \int Q dx,$$

那么

$$\frac{\delta I}{\delta u} \frac{d}{dx} \frac{\delta I_i}{\delta u} = \frac{dT_i}{dx}, \tag{10}$$

式中 $T_i(u, u', \cdots, u^{(2n-1)})$ 为 $u, u', u'', \cdots, u^{(2n-1)}$ 的某一多项式.

从关系式（10）和方程（7）我们可看出，T_i 为方程（7）的积分. 这样一来，我们便得到方程（7）的积分集合 T_0, $T_1, \cdots, T_{n+1}$. 又因

$$I_0 = \int \frac{u^2}{2} dx, \ \frac{dT_0}{dx} = \frac{\delta I}{\delta u} \frac{d}{dx} \frac{\delta I_0}{\delta u} = u' \frac{\delta I}{\delta u},$$

那么，按能量的通常定义，$T_0 = H(p, q)$.

结果所有积分 $H = T_0, T_1, \cdots, T_{n-1}$ 皆对合且独立；哈密顿系统(7)是完全可积的；“几乎”所有解都是周期性和准周期性函数(可能带有极点)．不过，这些积分的对合性很难

用直接计算来验证．方便地是直接从所有高阶 KdV（作为函数 $u(x)$ 空间的单参数变换群）之对易性得到这些积分的对合性．

我们把号码为 i、形式为 $\dot{u}=\left(\frac{\delta I_i}{\delta u}\right)'$ 的高阶 KdV 方程看成是方程（1）的定态解集合的变换群．并用常数集合 $c_1, \cdots, c_{n+1}$ 与 $x=x_0$ 时的初始点，也即用 (8) 所指出的相空间的坐标集合 $(p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n)$ 将方程 (1) 的定态解加以参数化．而这些定态解对于 x 的函数关系由哈密顿量为 (9) 的哈密顿系统来确定．

这样一来，在方程(1)的定态点集合上所考虑的号码为 i 的高阶 KdV 方程，便描述为相空间 $(p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n)$ 中的动力系统．按定义，在不同的号码 i 中，这些系统作为变换群是相互对易的．下面我们就来验证，所得到的号码为 i 的这一有限维系统是哈密顿系统，其正则变量同样为 p, q，但哈密顿量为 T_i．显然，这对积分 T_i 的对合性来说是充分的．此外，从中还得出另外一个重要推论：在坐标 p, q 中，原 KdV 方程本身同样是哈密顿系统，其哈密顿量为 $H_1=T_1$．

根据公式 (8)，(9)，哈密顿量 H 有下面形式：

$$
\begin{aligned}
H=\sum_{i=1}^{n} p_i u^{(i)}-Q &= \sum_{i=1}^{n-1} p_i q_{i+1} \\
&+p_n q_n'-Q(q_1, \cdots, q_n, q_n') \\
&=\sum_{i=1}^{n-1} p_i q_{i+1}+\Phi(q_1, \cdots, q_n, p_n),
\end{aligned} \tag{11}
$$

按 (8)，上式中 $p_n=\partial Q/\partial q_n'$．其中由此得到以下简单关系式：

$$
\frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_{j-1}} \equiv 1, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial q_l \partial p_s} \equiv 0 \quad l \leqslant s < n. \tag{12}
$$

容易直接验证更一般的恒等式:

$$-p_1' - \frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{\delta I}{\delta u}. \tag{13}$$

所以哈密顿量为 $H(p, q)$ 的诸哈密顿方程中仅仅头一个对应方程 $\delta I/\delta u = 0$.除此之外,其余的所有哈密顿方程可以看成是能用相空间变量 $p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n$ 来表示$u, u', \cdots, u^{(2n-1)}$ 的关系式. 恒等式(13)由于(10)具有下面形式:

$$\frac{dT_i}{dx} = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1} - p_1'\right)\left(\frac{d}{dx}\frac{\delta I_i}{\delta u}\right)$$

$$= \frac{\partial T_i}{\partial p_1} p_1' - \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial T_i}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T_i}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j}. \tag{14}$$

而恒等式(13)对任何函数 $u(x)$ 都是对的, 所以在恒等式(14)中可把 p_1' 当作任意一个数. 由此我们有

$$\frac{d}{dx}\frac{\delta I_i}{\delta u} = -\frac{\partial T_i}{\partial p_1}. \tag{15}$$

现在我们来研究相空间 (p, q) 中的流 $\dot{u} = (\delta I_i/\delta u)'$. 沿着这个流的微商我们将用点来表示. 借助于哈密顿量H对 x 的微商我们将用撇来表示. 因 $u = q_1$, 故从(15)式得到等式 $\dot{q}_1 = -\partial T_i/\partial p_1$. 如果由此推定方程 $\dot{q}_j = -\partial T_i/\partial p_j$ $(j = 1, \cdots, k)$ 也成立的话,那么当 $j = k + 1$ 时,我们就有

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{u}^{(k)} = (\dot{u}^{(k-1)})' = \dot{q}_k' = -\frac{d}{dx}\frac{\partial T_i}{\partial p_k}. \tag{16}$$

在 (p, q) 空间中的泊松括号, 我们用[,]来表示. 从方程(16)及雅可比恒等式,我们得到

$$\dot{q}_{k+1} = -\frac{d}{dx}\frac{\partial T_i}{\partial p_k} = -[H, [T_i, q_k]]$$

$$= [T_i, [q_k, H]] + [q_k, [H, T_i]]. \tag{17}$$

此外,还存在下面恒等式:

$$[q_k, H] = -\frac{\partial H}{\partial p_k} = q_k' = (u^{(k-1)})' = u^{(k)} = q_{k+1}.$$

又因 T_i 为哈密顿系统 (7) 的积分，于是 $[T_i, H] = 0$. 所以对 q_{k+1} 我们得到

$$\dot{q}_{k+1} = -\frac{\partial T_i}{\partial p_{k+1}} = -\frac{d}{dx}\frac{\partial T_i}{\partial p_k}.$$

从而推出了哈密顿方程的头一半. 下面我们先从指标 n 开始直到 1 来推出此方程的后一半.

因 $(\dot{q}_n)' = (q_n')^{\cdot}$，于是我们有

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_n}\right)^{\cdot} = \left(\frac{\partial T_i}{\partial p_n}\right)'.$$

从公式 (11) 求出等式

$$\frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial p_n},$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p_n}\right)^{\cdot} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_j}\frac{\partial T_i}{\partial p_j} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^2}\dot{p}_n = (q_n')^{\cdot}. \tag{18}$$

其次，我们从雅可比恒等式及 $H(p, q)$ 的形式得到

$$\begin{aligned}(\dot{q}_n)' &= \left[H, \frac{\partial T_i}{\partial p_n}\right] = -[H, [T_i, q_n]] \\ &= [T_i, [q_n, H]] + [q_n, [H, T_i]] = -\left[T_i, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right] \\ &= -\sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_j}\frac{\partial T_i}{\partial p_j} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_n^2}\frac{\partial T_i}{\partial q_n}.\end{aligned} \tag{19}$$

比较 (19) 和 (18)，我们求得

$$\dot{p}_n = \frac{\partial T_i}{\partial q_n}.$$

下面对所有 $j < n$ 的情况来推出 $\dot{p}_j$ 的哈密顿方程；我们利用等式 $(\dot{p}_j)' = (p_j')^{\cdot}$. 如果对号码 j 来说 $\dot{p}_j$ 方程的哈密

顿形式已成立的话，那么我们得到

$$(\dot{p}_i)' = \left[H, \frac{\partial T_i}{\partial q_i}\right] = [H, [p_i, T_i]] = -[p_i, [T_i, H]]$$
$$+ [[H, p_i], T_i] = \left[T_i, \frac{\partial H}{\partial q_i}\right]$$
$$= \sum_l \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_L} \frac{\partial T_i}{\partial p_L} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial q_i} \frac{\partial T_i}{\partial q_n}$$
$$- \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_{i-1}} \frac{\partial T}{\partial q_{i-1}},$$

$$(p_i')^{\cdot} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial q_L \partial q_i} \frac{\partial T_i}{\partial p_L} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_n} \frac{\partial T_i}{\partial q_n} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_{i-1}} \dot{p}_{i-1}. \tag{20}$$

因为从H的哈密顿形式(参看 (11)) 可以得到等式

$$\partial^2 H / \partial q_i \partial p_{i-1} = 1,$$

所以最后我们得到

$$\dot{p}_{i-1} = \partial T_i / \partial q_{i-1}.$$

这样我们建立了下面事实：流(高阶 KdV $\dot{u} = (\delta I_i / \delta u)'$) 在变量 (p, q) 中是哈密顿系统，其哈密顿量为 T_i. 同时由于相应的流对易，因此所有泊松括号 $[T_L, T_i]$ 皆为零. 由此还得出定态方程 (7) 是完全可积(按刘维)的系统.

让我们注意到，当我们在变量 p, q 中(即在另外一个流的定态点集合上)推导流 $\dot{u} = (\delta I_i / \delta u)'$ 的哈密顿形式时，仅仅依靠了恒等式 (10)，而此恒等式意味着下面的泊松括号等于零: $\{I, I_i\} = 0$. 所以我们实际上在流含有这种限制的运算中推出了保持哈密顿形式的更普遍的定理. 但是，函数 $u(x)$ 空间的泊松括号及欧拉-拉格朗日型方程 $\delta I / \delta u = 0$ 在有限维空间 (p, q) 中的泊松括号，二者之间由于没有任何直接联系，使得这一定理不明显是先验的 (a priori). 但不管怎

样，在上面所描述的流具有限制的运算中，关于保持哈密顿形式这一定理是非常普遍的．于是，我们建立了这样一个事实：对高阶 KdV 方程来说，其定态方程 (7) 的积分 $H = T_0$, $T_1, \cdots, T_{n-1}$ 是对合的．第一个非平凡情形是 $n=2$．方程 (3) 具有下面形式：

$$\frac{\delta I}{\delta u} = \frac{\delta I_2}{\delta u} + c_1 \frac{\delta I_1}{\delta u} + c_2 \frac{\delta I_0}{\delta u} = -c_3, \quad I = \int Q dx. \tag{21}$$

用变换 $u \to u + \text{const}$ 可以使 $c_1 = 0$.

按公式 (10), (1.5.6), (3) 直接计算，使我们得到以下积分公式 $(p, q \to \tilde{p}, \tilde{q})$:

$$\begin{aligned}
&T_0 = H = \tilde{p}_1\tilde{p}_2 + V(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2),\\
&cT_0 + T_1 = \tilde{p}_1^2 + 2u\tilde{p}_1\tilde{p}_2 + (2q - c_2)\tilde{p}_2^2 + D(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2),\\
&u = \tilde{q}_1;\ q = \tilde{q}_2 = \frac{\partial Q}{\partial u''};\ \tilde{p}_1 = q',\ \tilde{p}_2 = -u', \qquad (22)\\
&V = -\frac{q^2}{2} - \frac{5}{2}qu^2 - \frac{5}{8}u^4 + \frac{c_2}{2}u^2 + c_3 u,\\
&D = u^5 + c_2 u^3 - 4uq^2 + 2c_2 uq + 2c_3 q.
\end{aligned}$$

让我们提醒一下，在这些变量中，$T_1(p, q)$ 是 KdV 的时间动力学哈密顿量．系统 (21) 具有两个自由度，其哈密顿量依赖于两个常数 c_2, c_3 $(c_1 = 0)$ 并且在刘维意义下是完全可积的．在曲面 $T_0 = \text{const}$, $T_1 = \text{const}$ 上引入角变量的算法是已知的；不过这种算法在技术上不够方便，我们将不利用它．稍后（在第二章 §8 中）将从另外一个角度考虑来完成这些方程的积分．

§3. 高阶 KdV 的定态解及具有有限个能带的薛定谔方程的势．黎曼曲面

当一维薛定谔方程的周期性势 $u(x)$ 满足定态高阶 KdV

(2.3)时，具有非常好的谱性质：在这种势的布洛赫谱中仅仅存在有限个禁带．本节下面将推导这一事实．有限带的这一性质是寻求高阶 KdV 精确解的基础，它也是寻找有限带势本身及其本征函数的解析形式的基础．很早以前就知道，维尔斯特拉斯椭圆函数 $u = 2\wp(x)$ 就是具有一个有限禁带的周期性势(拉梅 (Lamé) 方程)．例如，在 [26]（参看 T.3）已指出这一事实，这里同时还指出，在所有整数 n 中，更高阶的拉梅势 $u_n(x) = n(n+1)\wp(x)$ 在布洛赫谱中刚好存在 n 个有限的禁带．至于其它一些有限带势直到出现 KdV 理论才知道．我们注意到，对维尔斯特拉斯椭圆函数 $u(x) = 2\wp + \text{const}$ 来说，函数 $u(x-ct)$，当 c 为一定时正是 KdV 方程的极浅水波，从而它满足 $n=1$ 的定态方程 (2.3)．这种一致性，并非巧合：我们将指出，对于高阶 KdV 的定态方程 (2.3) 来说，它们的所有周期性和准周期性解都是有限带势，而同样这些方程的衰减快的解都是无反射势．

和在 §1 中一样，我们假定势是周期为 T 的周期性势．我们对平移矩阵 $\hat{T}(x_0, t, E)$ 利用方程 (1.15) 和 (1.20)，其中矩阵 $\hat{T}$ 对 t 的依赖关系是借助于任何一个高阶 KdV 方程 (2.1) 实现的．方程 (1.15) 和 (1.20) 应是相容的：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial x_0}\right) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial t}\right).$$

从相容性这一要求得出

$$\frac{\partial}{\partial t}[Q, \hat{T}] = \frac{\partial}{\partial x_0}[\Lambda, \hat{T}], \tag{1}$$

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial t}, \hat{T}\right] + \left[Q, \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}\right] = \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_0}, \hat{T}\right] + \left[\Lambda, \frac{\partial \hat{T}}{\partial x_0}\right].$$

再从雅可比恒等式

$$[Q, [\Lambda, \hat{T}]] + [\hat{T}, [Q, \Lambda]] + [\Lambda, [\hat{T}, Q]] = 0$$

我们得到

$$\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_0} - \frac{\partial Q}{\partial t} - [\Lambda, Q], \hat{T}\right] = 0. \qquad (2)$$

矩阵 Λ, Q, $[\Lambda, Q]$ 迹为零并且它们是 E, $u(x_0)$, $u'(x_0)$, $\cdots$ 的多项式函数. 由此得到最后的方程(这种方程在第一章 § 8 中曾用别的方式推出过, 参看 (1.8.11), 在那里 $Q = U$, $\Lambda = V$):

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_0} - \frac{\partial Q}{\partial t} - [\Lambda, Q] = 0 \qquad (3)$$

或者

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \Lambda, \frac{\partial}{\partial x_0} - Q\right] = 0.$$

矩阵 Q 由公式 (1.21) 给出. 在以(1.2′)为基底的公式 (1.16) 中, 指出了如何通过算子 A 的系数来计算矩阵 Λ. 方程 (3) 给出 KdV 及其高阶类似物的新的非常有用的对易表象,这种表象同 Lax 表象 $\dot{L} = [L, A]$ 有所不同. 两个矩阵 Λ 和 Q 在基底 (1.2″) 中,都是参数 E、以及 $u(x_0)$, $\cdots$, $u^{(k)}(x_0)$ 的多项式函数. 这种表象, 从下面可看出是方便的. 让我们考虑任何一个高阶 KdV 的定态方程 (2.3). 于是,我们有

$$\dot{u} = 0,\ \dot{\Lambda} = \dot{Q} = \dot{\hat{T}} = 0,\ \dot{L} = [L, A] = 0. \qquad (4)$$

比较方程 (4) 和 (3), 得到

$$\frac{d\Lambda}{dx_0} = [\Lambda, Q]; \qquad (5)$$

用 x 代替 x_0, 此公式使我们得到了定态高阶 KdV(2.3) 的 Lax 型表象. 我们从表象 (5) 立即得到方程 (2.3) 的积分,这些积分是由矩阵 Λ 的特征多项式系数组成的:

$$\det(\lambda \cdot 1 - \Lambda) = P(\lambda, E) = \lambda^2 - (\mathrm{Sp}\Lambda)\lambda + \det\Lambda. \qquad (6)$$

但, $\mathrm{Sp}\Lambda = 0$, 所以

$$\det(\lambda \cdot 1 - \Lambda) = \lambda^2 + \det\Lambda = \lambda^2 + R(E), \tag{7}$$

$$\frac{d}{dx_0}\det\Lambda = 0.$$

对于 n 阶 KdV 来说，行列式本身，$\det\Lambda = R(E)$ 为 E 的 $2n+1$ 次多项式，其最高项系数为常数而其余各项的系数是 $u(x_0)$, $u'(x_0)$, $\cdots$, $u^{(2n-1)}(x_0)$ 的多项式函数：

$$R(E) = E^{2n+1} + a_1E^{2n} + \cdots + a_{2n}E + a_{2n+1}. \tag{8}$$

可以证明，头 $n+1$ 个系数 a_1, $\cdots$, a_{n+1} 实际上仅用包含在方程 (2.3) 中的常数 c_1, $\cdots$, c_{n+1} 来表示；而非平凡的积分只是 $Q_j = a_{n+1+j}$, $j = 1, \cdots, n$. 对于 n 个自由度系统 (2.3) 来说，积分集合 Q_1, $\cdots$, Q_n 等价于 § 2 所给出的积分集合 T_0, $\cdots$, T_{n-1} (参看 (2.10)). (事实上，这两个集合还相等.) 对于解 $\varphi = (\varphi_+, \varphi_-)$ 的基底 (1.2′) 来说，我们从公式 (1.13) 得到

$$L\varphi - E\varphi = 0,\ A\varphi - \Lambda\varphi = 0. \tag{9}$$

所以，其中值得注意的是，在多项式 $P(\lambda, E) = \det(\lambda \cdot 1 - \Lambda)$ 中，可用算子 L 代替 E，而用算子 A 代替 λ. 作出这种代换后，如果 $[L, A] = 0$，便得到算子 L 和 A 之间的关系式：

$$P(A, L) = A^2 + R(L) = 0, \tag{10}$$

这里 $R(E)$ 为常系数的 $2n+1$ 次多项式. 因为由于(9)，对所有 E，算子 $P(A, L)\varphi \equiv 0$，故从公式 (9) 得到关系式 (10).

考虑到 $\hat{T} = 0$，我们应用与 GGKM 方程类似的周期性方程 (1.15)：

$$[\Lambda, \hat{T}] = 0. \tag{11}$$

让我们提醒一下，布洛赫本征函数 $\psi_\pm(x, E)$ 曾定义为平移矩阵的本征向量(参看 (1.11))：

$$\hat{T}\psi_\pm = e^{\pm ipT}\psi_\pm,\ L\psi_\pm = E\psi_\pm.$$

又因矩阵 $\hat{T}$ 与 Λ 对易(参看 (11))，故布洛赫本征函数 $\psi_\pm(x,$

E）也同样是矩阵 Λ 的本征向量:

$$\Lambda\psi_{\pm} = \mu_{\pm}\psi_{\pm}. \tag{12}$$

现在让我们回忆一下,在基底 (1.2″) 中，矩阵 $\Lambda(E)$ 是 E 的多项式函数. 在线性代数中，已经知道这样一个简单事实:如果矩阵 Λ 是参数 E 的多项式函数,那么它的本征向量和本征值(作为 E 的函数)将是 E 的多值亚纯函数，同时这些多值函数 $\lambda(E)$ 的黎曼曲面由下面方程来确定:

$$0 = P(\lambda, E) = \det[\lambda \cdot 1 - \Lambda(E)] = 0. \tag{13}$$

在我们的情形中,矩阵 Λ 是二阶的且 $\mathrm{Sp}\Lambda = 0$，由此我们有

$$\lambda_{\pm}(E) = \mu_{\pm}(E) = \pm\sqrt{R(E)}. \tag{14}$$

公式 (14) 使我们得到一个在诸点 $E_0, \cdots, E_{2n}$ 外分枝的双叶黎曼曲面,其中这些点满足方程:

$$R(E_j) = \det\Lambda(E_j) = 0, \ j = 0, \cdots, 2n \tag{15}$$

因此布洛赫本征函数 $\psi_{\pm}(x, E)$ 原来是确定在双叶黎曼曲面 $\sqrt{R(E)}$ 上的复变量 E 的亚纯函数，其中 $\sqrt{R(E)}$ 的支点为零点 $E_0, E_1, \cdots, E_{2n}$. 下面我们指出，这些支点 E_j 刚好是布洛赫谱带的端点.实际上,按(1.11),函数 $\psi_{\pm}(x, E)$ 曾被定义为算子 L 和 $\hat{T}$ 的本征向量,而谱带曾同准动量 $p(E)$ 的实的线段相同. 按照 §1，带的端点曾定义为点 E_j，在这些点上 $pT = 0, \pi$，$\exp(\pm ipT) = \pm 1$，且矩阵 $\hat{T}$ 是约当的,即在二重简并的本征数中仅存在一个本征向量. 由此可见,在每一个能量值 E 上(实的和复的)我们正好有两个本征函数 $\psi_{\pm}(x, E)$，但带的端点 E_j 除外,在这些点上两个函数合并成一个. 因此,我们可看出，对任何周期性势来说，布洛赫本征函数 $\psi_{\pm}(x, E)$ 实际上是定义在黎曼曲面上，并且支点是带的端点. 不过，典型的势有无限多个带，从而支点数也无限多. 但对我们的情形,如果势满足定态方程 (2.3)，那么支点数从而带数都是有限的且等于 n. 准许带所处的位置是这样

的：

$$(E_0E_1),(E_2E_3),\cdots,(E_{2n-2}E_{2n-1}),(E_{2n}\infty)$$

(图 4). 为了使 $\psi_\pm(x, E)$ 有最少的零点和极点，对所有 E，方便地将它归一化为下面形式：

$$\psi_\pm(x, E)=1,\ x=x_0. \tag{16}$$

归一化成这样的本征函数我们用 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 来表示. 显然，在实的 $p(E)$ 中(即在准许带中)我们有 $\psi_- = \bar{\psi}_+$.

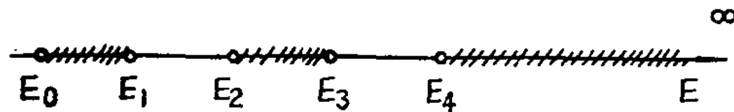


图 4. 准许带(画细线条的).

对于光滑实的势来说，函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 的诸零点和极点都分别位于禁带或者禁带的边界上. 我们将在下一节更详细地阐明函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 在黎曼曲面上的解析性质.

§4. 有限带势的布洛赫本征函数在黎曼曲面上的解析性质

我们用字母 Γ 来表示双值函数 $\sqrt{R(E)}$ 的黎曼曲面，这种曲面上的点用字母 $P, Q, \cdots$ 来表示，而这些点都是用 E 平面上的点再加上叶的符号也即 $P=(E, \pm)$ 来描述的*). 但支点 $E_0, E_1, \cdots, E_{2n}$ 除外，因为在这里 $(E_{j,+})$ 和 $(E_{j,-})$ 代表黎曼曲面的同一点. “忘记符号”的运算，即 $P=(E, \pm)\to E$ 可以看成黎曼曲面 Γ 在 E 平面上的投影，也可以看成黎曼曲面上的点取数值(复的)函数 $E(P)$. 因黎曼曲面 Γ 是由算子 L 的谱(即由成为支点的带的端点 E_j 之集合)来确定，所以我们也常常将黎曼曲面 Γ 本身叫做算子 L 的“谱”. 按条件

*) “+”号称上叶，“-”号称下叶. ——译注

(3.16) 归一化的布洛赫本征函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 可以看成是黎曼曲面上的点 $P=(E, \pm)$ 并且与参数 x、x_0 有关的单值函数 $\psi=\psi(x, x_0, P)$.

我们引入函数 $i\tilde{\chi}_\pm = d\ln\psi_\pm/dx = x - ik$ (参看 (1.5.2)). 按此定义我们有公式

$$\psi_\pm(x, x_0, E) = \exp\left\{i\int_{x_0}^{x} \tilde{\chi}_\pm(x, x_0, E)dx\right\}, \qquad (1)$$

并且 $\tilde{\chi}_\pm$ 与 x_0 无关. 函数 $\tilde{\chi}_\pm$ 同样是黎曼曲面 Γ 的单值函数. 从定义得出 $\tilde{\chi}_\pm$ 的黎卡提方程及准动量公式:

$$i\tilde{\chi}'_\pm - \tilde{\chi}^2_\pm = u - E,$$

$$\pm p(E) = \frac{1}{T}\left(\int_{x_0}^{x_0+T} \tilde{\chi}_\pm dx + n\pi\right). \qquad (2)$$

其次我们来改变一下在第一章 § 5 中的表示:

$\chi_R \to \chi_I$, $\chi_I - k \to \chi_R$. 我们得到

$$\tilde{\chi}_\pm = \chi_R + i\chi_I, \quad \chi_I = \frac{1}{2}(\ln\chi_R)'. \qquad (3)$$

所以,特别是我们有

$$p(E) = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} \chi_R dx. \qquad (4)$$

(3) 同 (1) 比较,得到 $\psi_\pm$ 的表达式:

$$\psi_\pm(x, x_0, E) = \sqrt{\frac{\chi_R(x_0, E)}{\chi_R(x, E)}}\exp\left\{\pm i\int_{x_0}^{x} \chi_R dx\right\}. \qquad (5)$$

由此得到

$$\psi_+\psi_- = \frac{\chi_R(x_0, E)}{\chi_R(x, E)}. \qquad (6)$$

乘积 $\psi_+\psi_-$ 按其本身定义已经是 E 平面上的单值函数(让我们提醒一下, 在准许带中 $\psi_+ = \bar{\psi}_-$, 因此 $\psi_+\psi_- = |\psi_\pm|^2$). 由于归一化 (3.16), 在基底 (1.2″) 中函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 有以下形式:

$$\psi_{\pm}(x, x_0, E) = c(x, x_0, E) + i\alpha_{\pm}(x_0, E)s(x, x_0, E). \quad (7)$$

表明系数 $\alpha_{\pm}$ 同 $\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E)$ 相等：

$$\alpha_{\pm}(x_0, E) = \tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E). \quad (8)$$

让我们来推导公式 (8). 当 $x = x_0$ 时，我们有

$$\psi'_{\pm}(x_0, x_0, E) = i\alpha_{\pm}(x_0, E),$$

$$\psi_{\pm}(x_0, x_0, E) = 1.$$

所以 $-i(\ln\psi_{\pm})'_{x=x_0} = \tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E) = \alpha_{\pm}(x_0, E)$. 因为 $c(x, x_0, E)$和 $s(x, x_0, E)$ 是复变量 E 的单值整函数，所以在黎曼曲面 Γ 上，$\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ 的极点及它们的重数正好同 $\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E)$ 的极点相同因而也就仅决定于 x_0.

对于光滑实的势 $u(x)$ 来说，从这一事实连同公式 (6) 一起得出一个重要推论： 如果布洛赫函数 $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ 的极点位于 Γ 曲面的点 $(E, +)$ 上，那么在点 $(E, -)$ 上就没有极点(支点 $(E_j, +) = (E_j, -)$ 除外). 实际上，从公式 (7) 得到，$\psi_{\pm}$ 的极点是同 $\tilde{\chi}_{\pm}$ 的极点包括重数在内皆相同，因此如果 $\psi_{\pm}$ 在点 $(E, +)$ 和 $(E, -)$ 处同时为 m_+ 和 m_- 重极点，那么在复平面点 E 上，乘积 $\psi_+\psi_-$ 就将有 $m_+ + m_-$ 重极点，即重数大了. 但这同公式 (6) 有矛盾，因从公式 (6) 得到，乘积 $\psi_+\psi_-$ 和 $\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E)$ 的极点连同重数都是一样的.

稍后我们就证明，函数 $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ 的全部极点都是简单的但位于点 $P_j = (\gamma_j(x_0), \pm)(j = 1, \cdots, n)$ 之上，同时这些极点都分别位于每一个有限长度的禁带或禁带的边界 E_j 上.

下面我们通过平移矩阵 $\hat{T}(x_0, E)$ 的系数来引进 $\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E)$的公式. 因由于 (8)，$\psi_{\pm} = c + i\tilde{\chi}_{\pm}(x_0)s$ 以及 $\hat{T}\psi_{\pm} = e^{\pm ipT}\psi_{\pm}$，$\hat{T}_c = \alpha_{11}c + \alpha_{12}s$，$\hat{T}s = \alpha_{21}c + \alpha_{22}s$，我们从 $\hat{T}$ 的本征向量定义，再通过系数 α_{ij} 便得到

$$\hat{T}\psi_{\pm} = \hat{T}(c + i\tilde{\chi}_{\pm}s) = \alpha_{11}c + \alpha_{12}s + i\tilde{\chi}_{\pm}(\alpha_{21}c + \alpha_{22}s)$$

$$= e^{\pm i p T}(c + i\chi_{\pm}s)$$

或者

$$\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E) = \frac{\sqrt{1 - a_R^2}}{\alpha_{21}} + \frac{i}{2}\frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \tag{9}$$

式中 $2a_R = \mathrm{Sp}\hat{T} = \alpha_{11} + \alpha_{22}$. 在 E 为实的情形下,所有 α_{ij} 都是实的. 在 E 的准许带中,我们有 $a_R^2 \leqslant 1$, 所以量 $\tilde{\chi}_{\pm} = \chi_R + i\chi_I$, 其中

$$\chi_R(x_0, E) = \frac{\sqrt{1 - a_R^2}}{\alpha_{21}},$$
$$\chi_I(x_0, E) = -\frac{1}{2}(\ln \chi_R)' = \frac{1}{2}\frac{\alpha_{11} - \alpha_{22}}{\alpha_{21}}. \tag{10}$$

在 $k(k^2 = E)$ 为实的情况下我们有 $\alpha_{21} = (a_1 + b_1)k^{-1}$.

复变量 E 的整函数 $1 - a_R^2(E)$、$\alpha_{21}(x_0, E)$ 的解析性质是这样的: 如果势是 n 带的, 那么在带的端点 $E_0, \cdots, E_{2n}$ 处,函数 $1 - a_R^2(E)$ 有简单零点,而在其余各点 $E_\gamma(\gamma > 2n, a_R^2 = 1)$ 处有双重零点;所有这些点都是实的且

$$\hat{T}(x_0, E_\gamma) = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E_γ 这些点同样也是函数 $\alpha_{21}(x_0, E)$ 的零点. 函数

$$\chi_R = \sqrt{1 - a_R^2}/\alpha_{21}$$

是双值的, 并且当 $E \to \infty$ 时渐近值为 $\chi_R \sim \pm k$, 这从黎卡提方程 (2) 得到并在第一章 § 5 已经指出这一结果. 让我们再提醒一下,正如本章 § 1 所指出的那样,当 $E \to \infty$ 时,函数 $1 - a_R^2(E)$ 的增长阶数为 $\frac{1}{2}$ (即估计出 $|1 - a_R^2| < c e^{\alpha\sqrt{E}}$). 从而 $1 - a_R^2$ 完全由它自己的零点确定为一个无穷乘积:

$$1 - a_R^2(E) = \mathrm{const}\prod_{j=0}^{2n}\left(1 - \frac{E}{E_j}\right)\prod_{\gamma > 2n}\left(1 - \frac{E}{E_\gamma}\right)^2. \tag{11}$$

让我们来研究由下面等式所定义的函数 $f(E)$:

$$\chi_R(x_0, E) = \frac{\sqrt{\prod_{j=0}^{2n}(E - E_j)}}{f(E)} = \frac{\sqrt{R(E)}}{f(E)}. \qquad (12)$$

从函数 $1 - a_R^2(E)$ 及 α_{21} 的解析性质得到,先求出分母的根(所有零点 E_γ 是双重的)[*],然后把分母的零点同分子的相应零点约掉. 所以在整个 E 平面上函数 $f(E)$ 是整函数.

因 $\chi_R f(E) = \sqrt{R(E)}$, 又因当 $E \to \infty$ 时 $\sqrt{R(E)} \sim \sqrt{E^{2n+1}}$, $\chi_R \sim \sqrt{E}$, 故 $f(E) \sim E^n$.

推论: $f(E)$ 是 n 次多项式 (n 为带数)

$$f(E) = \prod_{k=1}^{n}(E - \gamma_k(x_0)). \qquad (13)$$

最后,对 χ_R 和 χ_I 我们有以下公式:

$$\chi_R(x, E) = \frac{\sqrt{R(E)}}{\prod_{k=1}^{n}(E - \gamma_k(x))}, \qquad (14)$$

$$\chi_I = \frac{1}{2}(\ln\chi_R)' = -\frac{1}{2}\frac{\left[\prod_{k=1}^{n}(E - \gamma_k(x))\right]'}{\prod_{k=1}^{n}(E - \gamma_k(x))}.$$

根据公式 (6) 得到

---

*) 在 E_j ($j = 0, \cdots, 2n$) 这些点上, $\hat{T}$ 是约当的, $\alpha_{21}(x_0, E) \neq 0$; 在 $E_\gamma(\gamma > 2n)$ 这些点上, $1 - a_R^2$ 有双重零点,但 $\alpha_{21}(x_0, E_\gamma)$ 有简单零点,故在

$$\chi_R(x_0, E) = \sqrt{1 - a_R^2}/\alpha_{21}$$

中,消去 E_γ 这部分零点,得到书中 (12) 式. ——译注

$$\psi_+\psi_- = \frac{\prod_{k=1}^{n}(E-\gamma_k(x))}{\prod_{k=1}^{n}(E-\gamma_k(x_0))}. \tag{15}$$

方程 $L\varphi = E\varphi$ 任意一对解的朗斯基行列式 $W(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2'$ 与 x 无关．在准许带中我们从公式 (8) 得到

$$W(\psi_+, \psi_-) = 2i\chi_R(x_0, E) = 2i\frac{\sqrt{R(E)}}{\prod_k(E-\gamma_k(x_0))},$$

$$W(c, s) = -W(s, c) = -1. \tag{16}$$

公式 (16) 把量 $\chi_R(x, E)$ 对所有 E 的解析延拓定义为 E 的复解析函数．此定义也适用于复势 $u(x)$，这里对 $\tilde{\chi}_\pm = -i(\ln\psi_\pm)'$ 来说，考虑到 (3)，我们得到

$$\tilde{\chi}_\pm(x_0, E) = \frac{W(\psi_+, \psi_-)}{2i} + \frac{i}{2}\left(\frac{W'}{W}\right). \tag{17}$$

$\tilde{\chi}_\pm$ 这样的量满足黎卡提方程 (2)．

大家知道，对光滑实周期性势 $u(x)$ 来说，函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 在每一个有限长度的禁带上应有一个零点．由此可见，在每一个禁带上平均只能有一个零点 $\gamma_k(x)$ 和一个极点 $\gamma_k(x_0)$．这是因为根据公式 (15)，我们正好有 n 个零点 $\gamma_k(x)$ 和 n 个带．更确切地说，正如上面曾指出的那样，极点 $\gamma_k(x_0)$ 仅可放在黎曼曲面 Γ 的一个叶上，或者在点 $P_+ = (\gamma_k, +)$ 上，或者在点 $P_- = (\gamma_k, -)$ 上，如果这些点都不同的话(即除支点以外)．如果 $\gamma_k(x_0) = E_j$ 即同支点 $(E_j, +) = (E_j, -)$ 相重合，那么在黎曼曲面 Γ 上，乘积 $\psi_+\psi_-$ 就有双重极点(要注意到，当 $E = E_j$ 时，$\psi_+ = \psi_-$)．Γ 在这种点附近的局部坐标是用根的变换才同 E 平面坐标联系起来，所以在 E 平面上没有极点的二重性．

这样以来，我们得到以下结论（$u(x)$ 是光滑实的周期性势）：

1. 布洛赫函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 在黎曼曲面 Γ 上是亚纯的，并且当 $E \to \infty$ 时有渐近值 $\psi_\pm \sim \exp\{\pm i\sqrt{E}(x - x_0)\}$.

2. 函数 $\psi_\pm$ 正好有 n 个零点 $\gamma_i(x)$ 和 n 个极点 $\gamma_i(x_0)$，它们单独地在每一个禁带或者禁带的边界上.

3. 在曲面 Γ 上，零点和极点 $(\gamma_i, \pm)$ 全都是简单的；零点或极点仅可位于两点 $(\gamma_k, +)$、$(\gamma_k, -)$ 其中之一上.

4. $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 的零点仅仅是 x 的函数；曲面这些点 $P_k = (\gamma_k(x), \pm)$ 对 x 的依赖关系恰好同极点 $Q_k = (\gamma_k(x_0), \pm)$ 对 x_0 的依赖关系一样：当 $x \equiv x_0$ 时 $P_k(x) = Q_k(x_0)$，这是因为 $\psi_\pm(x_0, x_0, E) \equiv 1$.

5. 在曲面 Γ 上，按公式 (14)，函数

$$\chi_R = \frac{1}{2i}(\psi'_+\psi_- - \psi'_-\psi_+)$$

通过零点集合来表示. 把公式 (14) 同黎卡提方程及当 $E \to \infty (k^2 = E)$ 时下面的渐近展开(参看 (1.5.3))

$$\tilde{\chi}_\pm(x, k) = \pm k + \sum_{n \geqslant 0} \frac{\chi_{2n+1}(x)(-1)^{n+1}}{(2k)^{2n+1}} + i\sum_{n \geqslant 0} \frac{\chi_{2n+2}(x)(-1)^n}{(2k)^{2n+2}}. \tag{18}$$

进行比较，由此我们得到通过零点集合 $\gamma_k(x)$ 来表示系数 $\chi_n(x)$ 的表达式，第一章 §5 曾用 $u, u', u'', \cdots$ 计算出这里的 χ_R. 特别得到

$$\begin{aligned} u(x) &= -2\sum_{k=1}^{n} \gamma_k(x) + \sum_{j=0}^{2n} E_j, \\ \frac{1}{8}(3u^2 - u'') &= \sum_{k<l} \gamma_k\gamma_l - \frac{1}{2}\sum_{i<j} E_iE_j + \frac{3}{8}\Big(\sum_j E_j\Big)^2. \end{aligned} \tag{19}$$

§5. 若干应用

I. 下面我们将引进 $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ 的零点、极点关于 x 的方程．考虑量

$$\tilde{\chi}_{\pm}(x_0, E) = \frac{\sqrt{R(E)} - \frac{i}{2}\frac{d}{dx_0}\left[\prod_{k=1}^{n}(E - \gamma_k(x_0)\right]}{\prod_{k=1}^{n}(E - \gamma_k(x_0))}, \quad (1)$$

式中 $\tilde{\chi}_{\pm}$ 的极点放置在两点 $(\gamma_k(x_0), +)$、$(\gamma_k(x_0), -)$ 其中之一上(也只能在一个上)，其中这两点是在 E 平面中点 $\gamma_k(x_0)$ 上面的黎曼曲面 Γ 上． 现在假设极点处于点 $Q_k = (\gamma_k(x_0), +)$ 上．在点 $(\gamma_k, -)$ 处没有极点的条件等价于当 $E = \gamma_k(x_0)$ 时公式 (1) 的分子等于零，因这时分母等于零．所以

$$\sqrt{R(E)}\Big|_{E=\gamma_k(x_0)} = \frac{i}{2}\frac{d}{dx_0}[\Pi(E - \gamma_k(x_0))]\Big|_{E=\gamma_k(x_0)}. \quad (2)$$

方程 (2) 可以解出 γ_k'．我们作代换 $x_0 \to x$ 之后得到

$$\gamma_k' = \pm 2i\sqrt{R(\gamma_k)}\prod_{j\neq k}(\gamma_k - \gamma_j)^{-1}. \quad (3)$$

同时，根据 (4.19)，势有下面形式:

$$u(x) = -2\Sigma\gamma_k(x) + \Sigma E_j.$$

例 1．令 $n = 1$．于是我们有一个方程:

$$\gamma_1' = \pm 2i\sqrt{R(\gamma_1)}$$

附有 (4)

$$u(x) = -2\gamma_1(x) + \sum_{j=0}^{2} E_j.$$

我们又一次得到单值的拉梅势．

例 2．令 $n = 2$．在这种情形下，我们有两个方程:

$$\gamma_1' = 2i\sqrt{R(\gamma_1)}\,(\gamma_1 - \gamma_2)^{-1},$$
$$\gamma_2' = 2i\sqrt{R(\gamma_2)}\,(\gamma_2 - \gamma_1)^{-1}.$$

容易看出,由此得到

$$-\frac{d\gamma_1}{\sqrt{-R(\gamma_1)}} = \frac{d\gamma_2}{\sqrt{-R(\gamma_2)}} = \frac{2dx}{\gamma_2 - \gamma_1} = d\tau. \tag{5}$$

这时总是 $\gamma_2 - \gamma_1 > 0$，这因为 γ_1 和 γ_2 是在 E 的不同禁带中,而这些禁带又都被准许带分开:

$$\begin{aligned} &E_0 < E_1 \leqslant \gamma_1 \leqslant E_2 < E_3 \leqslant \gamma_2 \leqslant E_4, \\ &E_1 < E_2, E_3 < E_4. \end{aligned} \tag{6}$$

显然,方程 (5) 可以积分,积分后便得到势 $u(x) = -2(\gamma_1 + \gamma_2) + \Sigma E_j$. 我们引入两个实的周期性函数 $F_1(\tau)$ 和 $F_2(\tau)$,对这两个函数相应有:

$$\begin{aligned} \tau &= \int_{E_1}^{F_1} \frac{d\gamma}{\sqrt{-R(\gamma)}}, \quad F_1 = F_1(\tau), \\ \tau &= \int_{E_3}^{F_2} \frac{d\gamma}{\sqrt{-R(\gamma)}}, \quad F_2 = F_2(\tau). \end{aligned} \tag{7}$$

显然,函数 F_1 和 F_2 限定在下面区域中:

$$\begin{aligned} E_1 \leqslant F_1 \leqslant E_2, \\ E_3 \leqslant F_2 \leqslant E_4, \end{aligned} \tag{8}$$

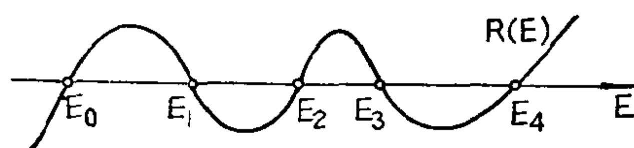
这是因为多项式 $R(E)$ 的图形为如图 (5) 所示的形式.

从方程 (5) 我们得到

$$u(\tau(x)) = -2(F_1(-\tau) + F_2(\tau + \tau_0)) + \sum_{j=0}^{4} E_j,$$
$$x - x_0 = \int_0^\tau \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1)d\tau. \tag{9}$$

一般来说,如果带的边缘 E_j 的集合任意给定，那么这些公式便给出双带准周期性势. 公式 (7), (9) 连同所定义的超椭

圆函数 F_1、F_2 一起单值地确定出初始点 τ_0，x_0 的选取．顺便指出，在复区域内，两个函数 F_1 和 F_2 实质是一个函数．利用公式 (4.19)，容易直接验证方程 (5) 同 $n=2$ 时的定态高阶 KdV 方程相同，其中 γ_1 和 γ_2 为 (2.22) 式中两个积分的能



$$R(E)=\prod_{\alpha=0}^{\alpha=4}(E-E_\alpha)$$

图 5．　多项式 $R(E)$ 的图形．

级曲面*)的坐标．所以势 $u(x)$ 本身满足 $n=2$ 的方程 (2.3)．对于方程 (3) 所有 $n\geqslant 2$ 情形的完全积分以及势 $u(x)$ 的方便的解析形式稍后将在本章 § 9 中得到．

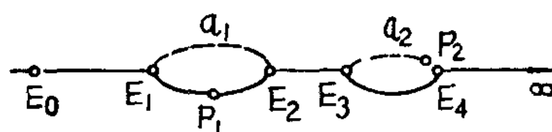


图 6．　黎曼曲面中的闭链 a_i "悬"在禁带上．

一般来说，方程 (5) 的解是带有两个有理-独立周期 T_1、T_2 的准周期性函数，这两个周期完全是由黎曼曲面 Γ 确定的 (参看 § 9)．从几何学上，方程 (5) 可以想像成这样：位于禁带上面的黎曼曲面中的点构成闭链 a_1，a_2 (在这里 $n=2$) (图 6)；而函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 的零点 P_1，P_2 正如图中所示的那样，分别位于闭链 a_1、a_2 上，但零点本身的位置却随 x 的变化而变化．从拓扑学角度上看，闭链 a_1、a_2 是个圆周，而"相点" $(P_1, P_2)=(\gamma_1, \pm, \gamma_2, \pm)$ 都位于二维环面上．于是方

*) 即 $T_0=H=\text{const}$，$aT_0+T_1=\text{const}$．——译注

程 (5) 便描述了"相点" (P_1, P_2) 沿此环面的动力学.

用类似方法，更为普遍的方程 (3) 便描述相点 $(P_1, \cdots, P_n) = (\gamma_1, \pm, \gamma_2, \pm, \cdots, \gamma_n, \pm)$ 沿 n 维环面的运动，这里的每一点 $P_j = (\gamma_j, \pm)$ 相应位于号码为 j 的禁带上面的曲面 Γ 中的闭链 a_j 上.

在这种环面上，稍后(参看 § 8) 将指出一种变量代换，这种代换能引进这样一种"角"坐标 φ_k，使得 $\varphi_k' = \text{const}$. 为此目的，势必得引入一系列黎曼曲面理论的有关事实(参看 § 6, § 7).

II. 下面我们指出，把我们的语言同通常的算子谱理论的语言作一下对比. 把参数 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 解释为算子 $L = -d^2/dx^2 + u$ (在"逆问题"理论中，它是一种惯用算子) 的 Sturm-Liouville 型谱问题的附加谱. 当 $E = \gamma_k$ 处于曲面 Γ 的其中一个叶上时，本征函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 等于零. 假设这个叶的符号为加号. 于是 $\psi_+(x, x_0, \gamma_k(x)) = 0$. 此外，当 $x \to +\infty$ 时，$\psi_+ \to 0$ (如果零点在"减号"的叶上，那么 $\psi_-(x, x_0, \gamma_k(x)) = 0$ 及当 $x \to -\infty$ 时，$\psi_- \to 0$). 让我们来研究 $\psi_+(x+\tau, x_0, \gamma_k(x))$ 以及算子 $L_\tau = -d^2/d\tau^2 + u(\tau + x)$. 我们有

$$L_\tau \psi_+(x+\tau, x_0, \gamma_k(x)) = \gamma_k(x) \psi_+(x+\tau, x_0, \gamma_k(x)),$$

其中

$\psi_+ = 0$ 当 $\tau = 0$ 时; $\psi_+ \to 0$ 当 $\tau \to +\infty$ 时. 因而，函数 $\psi_+(x+\tau, x_0, \gamma_k(x))$ 成为算子 L_τ 的分立谱的本征函数，相应此函数的能级 $E = \gamma_k(x)$ (在这里 x 是参数)是在半直线 $\tau \geqslant 0$ 上，且 $\tau = 0$ 时边界值为零. 这就给出了点 $P_k^+ = (\gamma_k, +)$ 的谱解释. 倘若零点在曲面 Γ 的点 $P_k^- = (\gamma_k, -)$ 上，那么类似的算子 L_τ 就在半直线 $L \leqslant 0$ 上存在分立的点谱，这是因为当 $\tau \to -\infty$ 时，$\psi_-(x+\tau, x_0, \gamma_k(x)) \to 0$. 根据

公式 (4.19)，势 $u(x)$ 和原始的布洛赫谱（这种谱给出黎曼曲面 Γ）一起单值地被函数 $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ 的零点集合所确定. 不过这里所指出的零点 $(\gamma_k(x), \pm)$ 的谱解释并不是唯一的. 例如在同样这些条件下，函数 $\psi_{\pm}(x+\tau, x_0, \gamma_k(x))$ 在所有 $\tau = nT$（其中 T 是势的周期）情形下，都等于零，这是因为 $\psi_{+}(x+\tau+T) = e^{ipT}\psi_{+}(x+\tau)$，而当 $\tau = 0$ 时 $\psi_{+}(x+\tau, x_0, \gamma_k(x)) = 0$. 所以在线段 $(0, T)$ 上，算子 L_τ 的能级 $E = \gamma_k(x)$ 成为边界条件为零的 Sturm-Liouville 问题的点谱. 不过这种解释没有指出曲面 Γ 的有关上 (+)、下 (−) 叶（这里有函数 $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ 的零点）之任何情报.

III. 我们在周期固定情况下，引入准动量 $p(E)$ 关于势 $u(x)$ 的变分导数公式，由此我们将建立这样一个事实：任何一个有限带势满足方程 (2.3)（定态高阶 KdV）其中的一个.

根据 (4.2)，(4.4)，对于准动量我们有

$$\pm pT = \int_{x_0}^{x_0+T} \tilde{\chi}_{\pm} dx = \int_{x_0}^{x_0+T} \chi_R dx. \tag{10}$$

由于黎卡提方程 (4.2)，准动量 $p(E)$ 实际上仅依赖于 $u - E$. 下面我们将推出变分导数公式:

$$\frac{\delta p}{\delta u(x)} = -\frac{1}{2\chi_R}. \tag{11}$$

然后再指出另一个公式：因 $p = p\{u - E\}$，那么从 (11) 我们得到

$$\frac{\partial p}{\partial E} = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} \frac{dx}{2\chi_R} = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} \frac{\prod_{k=1}^{n}(E - \gamma_k(x))}{\sqrt{R(E)}} dx. \tag{12}$$

我们研究薛定谔算子 $L_i = -d^2/dx^2 + u_i(x)$. 令 y_1, y_2 是方程 $L_i y_i = E y_i$ 的解，其中 $i = 1, 2$. 对朗斯基行列式 $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ 我们有

$$\frac{dW}{dx} = (u_1 - u_2)y_1y_2. \tag{13}$$

我们把两个势 u_1，u_2 都算作周期为 T 的周期性势．我们在准许带中来研究 L_i 这两个算子的布洛赫函数 $\psi_\pm^{(i)}(x, x_0, E)$，并假定

$$y_1 = \psi_+^{(1)}, \quad y_2 = \psi_-^{(2)}.$$

我们对恒等式 (13) 从 x_0 到 $x_0 + T$ 作积分得到

$$W|_{x=x_0+T} - W|_{x=x_0} = \int_{x_0}^{x_0+T} (u_1 - u_2)\psi_+^{(1)}\psi_-^{(2)}dx.$$

在基底 (1.2″) 中，对这两个势 $u_i(x)$ 来说，因按 (4.8)，$\psi_\pm^{(i)} = c^{(i)} + i\tilde{\chi}_\pm(x_0)s^{(i)}$，于是我们再从 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 的定义求出：

$$\begin{aligned} &i(e^{i(p_1-p_2)T} - 1)(\tilde{\chi}_+^{(1)}(x_0) - \tilde{\chi}_-^{(2)}(x_0)) \\ &= \int_{x_0}^{x_0+T} (u_1 - u_2)\psi_+^{(1)}\psi_-^{(2)}dx. \end{aligned} \tag{14}$$

在准许带中我们有 $\bar{\tilde{\chi}}_+ = -\tilde{\chi}_-$.

现在假设 $u_1 - u_2 = \delta u(x)$ 很小，我们在等式 (14) 中仅保留线性项，从而得到

$$-(\delta p)T(\tilde{\chi} + \bar{\tilde{\chi}})_{x_0} = \int_{x_0}^{x_0+T} \delta u|\psi_\pm|^2dx. \tag{15}$$

又因

$$\tilde{\chi} + \bar{\tilde{\chi}} = 2\chi_R(x_0), \quad |\psi_\pm|^2 = \frac{\chi_R(x_0, E)}{\chi_R(x, E)},$$

故按公式 (15) 我们求出

$$\delta p = -\frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} \frac{\delta u(x)dx}{2\chi_R(x, E)},$$

从而推出公式 (11) 和 (12).

对有限带势来说，我们已经知道 χ_R 的形式 (参看 (4.14))． 现在当 $E \to \infty$ 时，把等式 (11) 两边按 $1/\sqrt{E}$ 展开，我们得到 ($k^2 = E$)：

$$\frac{1}{T}\frac{\delta}{\delta u(x)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2k)^{2n+1}}\int_{x_0}^{x_0+T}\chi_{2n+1}(x)dx\right)$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{E}}\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{\gamma_j(x)}{E}\right)\prod_{\alpha=0}^{2n}\left(1-\frac{E_\alpha}{E}\right)^{-1/2}, \tag{16}$$

式中 $2I_{n-2}=\frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T}\chi_{2n+1}dx$ 为 Kruskal 多项式积分并且是高阶 KdV 的哈密顿量．等式(16)的右边有下面形式:

$$-\frac{1}{2\sqrt{E}}\left(1+\frac{b_1}{E}+\frac{b_2}{E^2}+\cdots\right),$$

其中 $i\geqslant 1$ 的所有 b_i 都是用 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 的 n 个基本对称函数集合线性地(带有常系数)表示出来．由此得到下面形式的线性关系式:

$$b_{n+1}+\sum_{k=0}^{n}c_{k+1}b_{n-k}=0, \tag{17}$$

式中 $c_1,\cdots,c_{n+1}$ 是常数，$b_0=1$．但是，从等式(16)得到

$$b_k=\pm 2\frac{\delta I_{k-1}}{\delta u},\ k=0,\cdots,n. \tag{18}$$

比较关系式(17)和(18)，我们得到结论：任何一个 n 带周期性势满足下面的定态高阶 KdV 方程(2.3)的其中之一:

$$\frac{\delta I_n}{\delta u(x)}+\bar{c}_1\frac{\delta I_{n-1}}{\delta u(x)}+\cdots+\bar{c}_n\frac{\delta I_0}{\delta u(x)}+c_{n+1}=0, \tag{19}$$

式中 $\bar{c}_k=\pm c_k, I_{-1}=\frac{1}{T}\int u dx$.

IV．下面让我们借助于 KdV 和高阶 KdV 来引入布洛赫本征函数的零点和极点的时间动力学方程．

考虑任何一个高阶 KdV (2.1)及其 Lax 表象(2.2)．让我们回忆一下，算子 L 的本征函数的基底(1.2′)或(1.2″)，

它们的方程 (1.13) 为

$$\dot{\varphi} = -A\varphi + \Lambda\varphi,$$

式中的矩阵 Λ 在 (1.16) 中已指出. 我们来推导一般公式

$$\dot{\chi}_R = (\lambda\chi_R)', \tag{20}$$

在基底 (1.2″) 中,式中 $\lambda = \lambda_{21}$; 而在基底 (1.2′) 中,在 k 为实的情况下 ($k^2 = E$), $\lambda = \frac{1}{k}(\lambda_I + \mu_I)$. 我们再回忆一下,在基底 (1.2″) 中 $\Lambda = (\lambda_{ij})$; 而在基底 (1.2′) 中,在 k 为实的情况下按 (1.13) $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$. 我们指出,公式 (19) 乃是 KdV 和高阶 KdV 守恒律的有益精确化,因为根据第一章 § 5, 我们已经有

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^T \chi_R dx\right) = 0$$

以及在 $E \to \infty$ 情况下从量 $\frac{1}{T}\int \chi_R dx$ 按 $1/\sqrt{E}$ 的渐近展开式中曾得到过多项式守恒律 I_g. 顺便提醒一下,根据 (4.4) 量 $\frac{1}{T}\int_0^T \chi_R dx$ 正好是准动量 $p(E) + m\pi/T$. 为了推导公式 (20), 我们利用平移矩阵 $\hat{T}$ 关于参数 x_0 的方程 (1.20). 在基底 (1.2′) 中,从方程 (3.3), (1.20) 得出一般恒等式:

$$\begin{aligned} 2\mu_R &= -\frac{d}{dx_0}\left(\frac{\lambda_I + \mu_I}{k}\right) = -\frac{d}{dx_0}\lambda_{21}, \\ 2b_R &= -\frac{d}{dx_0}\left(\frac{a_I + b_I}{k}\right) = -\frac{d}{dx_0}\alpha_{21}. \end{aligned} \tag{21}$$

现在我们利用矩阵 $\hat{T}$ 的按任何一个高阶 KdV 动力学的 GGKM 方程周期性类似物 (1.15), 以及利用 (4.10) 所指出的量 χ_R 的表达式 (它是通过平移矩阵 $\hat{T}(x_0, E)$ 的系数来表示的). 现在我们在基底 (1.2′) 中进行计算. 因

$$\chi_R = \sqrt{1 - a_R^2}\,\alpha_{21}^{-1},$$

其中由于任何一个高阶 KdV，$\dot{a}_R = 0$，因此我们只需计算 $\dot{\alpha}_{21}$ 或者在基底 (1.2″) 中只需计算 $(\dot{a}_I - \dot{b}_I)/k$. 将 (1.15) 的时间导数表达式代入*)，并利用 (21)，再将 x_0 用 x 代替后我们便得到所要求的公式 (20).

现在我们将对有限带势 $u(x)$ 的动力学来应用一般公式 (20)；根据 (4.12)，量 χ_R 有这样的形式：

$$\chi_R = \sqrt{R(E)}\,P_n^{-1}(x, E),$$

式中

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} (E - \gamma_k(x)).$$

从公式 (20) 我们得到(对所有 E)：

$$\dot{P}_n = \lambda' P_n - \lambda P_n'. \tag{22}$$

现在令 $E = \gamma_k$. 于是 $P_n = 0$. 从此式得到

$$(\dot{P}_n)_{E=\gamma_k} = (\lambda P_n')_{E=\gamma_k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{23}$$

对于量 $(P_n')_{E=\gamma_k}$ 我们先前已经得到了公式 (2)，由此连同 (22) 一起我们有

$$(\dot{P}_n)_{E=\gamma_k} = (\lambda P_n')_{E=\gamma_k} = -2i\lambda\sqrt{R(\gamma_k)}, \tag{24}$$

式中 $R(E) = \prod_{j=0}^{2n} (E - E_j)$，而在基底 (1.2″) 中，$\lambda = \lambda_{22}$. 也同方程 (3) 一样，我们可以用相对量 $\dot{\gamma}_k$ 来解方程 (2)，最后得到：

$$\dot{\gamma}_k = 2i(\lambda)_{E=\gamma_k}\sqrt{R(\gamma_k)}\prod_{j\neq k} (\gamma_k - \gamma_j)^{-1}. \tag{25}$$

---

*) 在基底 (1.2′) 中，从 (1.15) 求出以下时间表达式：

$$\dot{a}_I = 2(\mu_I b_R - \mu_R b_I), \qquad \dot{b}_I = 2(\lambda_I b_R - a_I \mu_R),$$

故得 $\dot{a}_I + \dot{b}_I = -2\mu_R(a_I + b_I) + 2b_R(\lambda_I + \mu_I)$，将此式代入到 $\dot{\chi}_R$ 中. ——译注

特别，对矩阵 Λ，由于通常 KdV 动力学我们有公式 (1.19)，其中

$$\lambda = \lambda_{22} = \frac{1}{k}(\lambda_I + \mu_I) = -2(u + 2E). \tag{26}$$

如果带数 $n = 1$，那么从公式 (25) 出发，利用通常的方法我们又重新得到 Korteweg-deVries 的极浅水波 $u(x - ct)$. 第一个非平凡情形是 $n = 2$. 对 $n = 2$，方程 (25) 有下面形式:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\gamma}_1}{\sqrt{-R(\gamma_1)}} &= \frac{8(\gamma_2 - \Sigma E_j/2)}{\gamma_1 - \gamma_2}, \\ \frac{\dot{\gamma}_2}{\sqrt{-R(\gamma_2)}} &= \frac{8(\gamma_2 - \Sigma E_j/2)}{\gamma_2 - \gamma_1}. \end{aligned} \tag{27}$$

我们来研究 $\Sigma E_j = 0$ 的势. 我们按下面公式引进参量 w:

$$dw = \frac{8\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} dt. \tag{28}$$

于是方程 (27) 有下面形式:

$$\frac{\gamma_1 d\gamma_1}{\sqrt{-R(\gamma_1)}} = -\frac{\gamma_2 d\gamma_2}{\sqrt{-R(\gamma_2)}} = dw. \tag{29}$$

方程 (29) 的积分是明显的. 我们这里略去这种计算，只引入 $u(x, t)$，(9) 形式的动力学结果:

$$\begin{aligned} u(x, t) = -2[&F_1(-\tau(x - x_0(t)) \\ &+ F_2(\tau_0(t) + \tau(x - x_0))], \end{aligned} \tag{30}$$

式中 $\Sigma E_j = 0$.

对参数 $\tau_0(t)$，$x_0(t)$ 我们得到

$$\tau_0(t) = 4t, \quad \dot{x}_0 = 4F_1(\tau_0(t)). \tag{31}$$

公式 (30) 完全描述双带势按 KdV 的时间动力学.

§ 6. 黎曼曲面理论知识. 黎曼曲面上的闭链

正如大家从复变函数理论所知道的那样，在独立变量 E 的复平面上，黎曼曲面被定义为多值函数的图形. 从 E 平面去掉一定数量的起名为"截口"的线段（直线或者曲线，也可能是一个端点为∞的半射线）以后，通常得到这样的 E 平面区域，在这种区域上面多值函数的图形分成若干块，而这些块彼此以连续的途径隔开. 每一个这样的块都是单值函数的图形，从而单值函数便构成多值函数的"分枝"之一. 就我们的目的来说，这种数学分析的标准语言是不方便的. 因此我们按以下所述的形式来引进黎曼曲面 Γ：假设已知两个复变量 y 和 E 的复解析函数 $F(y, E)$；黎曼曲面 Γ（"复曲线"）指定为下面方程解的集合：

$$F(y, E) = 0. \tag{1}$$

方程 (1) 确定一个多值函数 $y = y(E)$，从而曲面 Γ 便成为这种多值函数的黎曼曲面. 直观上可以这样来想像：从曲面 Γ 中利用它在 E 和 y 平面的投影得到多值函数 $y(E)$. 如果 P 是曲面 Γ 的已知坐标为 y_0、E_0 的某一点，则根据定义 $y_0 = y(E_0)$. 但曲面 Γ 在 E 平面上的投影可以不是相互单值的，因为可以有好几个具有共同坐标 E_0 的点 $P_i = (y_i, E_0)$. 于是所有 y_i 皆为多值函数 $y(E_0) = \{y_i\}$ 的数值. 这也正是函数 $y(E)$ 多值性的起源.

相应 (1) 的曲面 Γ 的点 $P = \{y_0, E_0\}$，如果下面的复梯度不等于零，即

$$\nabla_c F = \left(\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial E}\right)_{y_0, E_0} \neq 0, \tag{2}$$

则称这种点为非奇异的.

下面我们来考虑两种情形.

1. 如果 $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$，那么在点 E_0 附近可以确定 $y(E)$ 的这样一个单值分枝，使得 $y(E_0) = y_0$. 在这种情形下，在 (y_0, E_0) 附近的曲面 Γ 的诸点有下面形式：

$$\Gamma = (y(E),\ E). \tag{3}$$

这就是说，在靠近 E_0 的不大区域中，参数 E 是曲面 Γ 上的局部坐标.

2. 如果 $\dfrac{\partial F}{\partial E} \neq 0$，则在点 y_0 附近可以确定反函数 $E(y)$ 的这样一个单值分枝，使得 $E(y_0) = E_0$. 在这种情况下，在 (y_0, E_0) 附近的曲面 Γ 的诸点有下面形式

$$\Gamma = (y,\ E(y)). \tag{4}$$

这就是说，在第二种情形中参数 y 是点 $(y_0, E_0) = P$ 附近的局部坐标. 而在 $\partial F/\partial y \neq 0$ 和 $\partial F/\partial E \neq 0$ 的诸点附近，局部坐标即可以是 y，也可以是 E，故可作代换：$y \rightleftarrows E$.

黎曼曲面 Γ 的奇点由条件 $\nabla_c F = 0$ 来确定.

在 (y, E) 平面上，由曲面 Γ 所确定的多值函数 $y(E)$ 的支点由下面条件求出：

$$\partial F/\partial y = 0. \tag{5}$$

和曲面 Γ 方程一起，在 (y, E) 空间中，支点的两个条件 (1)、(5) 给出曲面 Γ 的分立点的集合 $P_0, P_1, \cdots, P_N$. 这些点在 E 平面上的投影 $E_0, E_1, E_2, \cdots, E_N$ 给出函数 $y(E)$ 的支点. 由于支点集合的分立性，这种集合没有把曲面 Γ 和 E 平面分成若干部分. 在 E 平面的其余部分上，诸叶(函数 $y(E)$ 之值)随 E 的变化而连续变形，虽然绕闭合迴路一周后诸叶可以改变位置，但彼此并不重叠.

代数黎曼曲面 Γ 的理论有极其丰富的内容. 我们将认为，函数 $F(y, E)$ (它是借助于方程 (1) 确定曲面 Γ 的函数)

是两个变量 y 和 E 的幂次为 m 的多项式：

$$F(y, E) = \sum a_{ij} y^i E^j = 0 \tag{6}$$

其中 $i \geqslant 0, j \geqslant 0, i + j \leqslant m$. 这也是一般的代数黎曼曲面 Γ. 它的方程可以写成下面形式：

$$y^m + a_1(E) y^{m-1} + \cdots + a_m(E) = F = 0, \tag{7}$$

式中所有 $a_i(E)$ 是有理函数（E 的多项式之比）. 在这种情形中，函数 $y(E)$ 有 m 个值，但支点 $\partial F/\partial y = 0$ 除外，在支点处多项式 F 的根是多重的.

最简单一类黎曼曲面(在 KdV 方程理论以及具有有限带周期性势的薛定谔方程理论中我们将需要这种曲面)，就是所谓超椭圆黎曼曲面 Γ，它由下面方程给出：

$$F(y, E) = y^2 + R(E) = 0, \tag{8}$$

式中 $R(E)$ 是系数为常数的 E 的多项式(在 KdV 和薛定谔方程理论中，重要的情形是 $R(E)$ 为奇次多项式).

如果多项式 $R(E)$ 的幂次等于 1 或 2，那么这样的曲面称为“有理的”或亏格（genus）为 0 的曲面(球面拓扑).

如果多项式 $R(E)$ 的幂次等于 3 或 4，那么这种曲面 Γ 称为椭圆的或称亏格为 1 的黎曼曲面(环面拓扑). 我们将研究非奇异的黎曼曲面 Γ，对这种曲面处处 $\nabla_c F \neq 0$，其中 $F = 0$.

对超椭圆曲面 (8) 来说，非奇异条件表示如下：

$$F = y^2 + R(E), \quad \nabla_c F = (2y, R'(E)) \neq 0. \tag{9}$$

1. 如果 $y \neq 0$，那么 $\nabla_c F \neq 0$，因而在曲面 Γ 的这些点 $P = (y_0, E)$ 附近的局部坐标为 E.

2. 如果 $y = 0$，那么由于 (9)，曲面 Γ 的诸点 $P = (0, E_i)$ 的非奇异性等价于下面这对方程的不可解性：

$$R(E_j) = 0, \quad R'(E_j) \neq 0 \tag{10}$$

或等价于多项式 $R(E)$ 没有重根. 如果 $y = 0$，于是曲面 Γ

在这种点 $(0, E_j)$ 附近的局部坐标为 y 且 $R(E_j)=0$. 这些点是函数 $y=\sqrt{-R(E)}$ 的支点，同时曲面 Γ 刚好有两个叶.

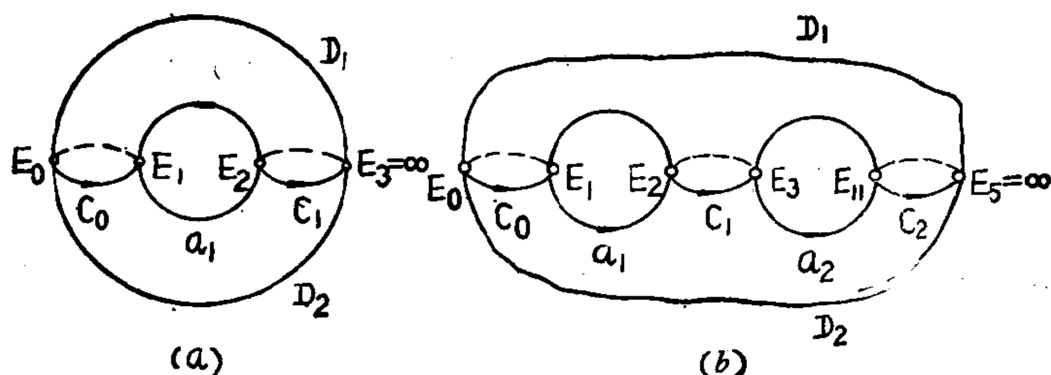


图 7. 曲面: a) 亏格 $g=1$, $y^2=\prod_{\alpha=0}^{2}(E-E_\alpha)$;

b) 亏格 $g=2$, $y^2=\prod_{\alpha=0}^{4}(E-E_\alpha)$.

如果 $R(E)$ 是 $m+1$ 次多项式,那么为了方便,则假设多项式 $R(E)$ 的全部根 E_j 皆为实的且相异(非奇异曲面 Γ):

$$E_0<E_1<\cdots<E_m, \tag{11}$$

下面我们来研究这种曲面 Γ 的拓扑性质. 我们把线段 (E_0E_1), (E_1E_2), $\cdots$ 从 E 平面去掉，考虑下面两种情形(图 7 和 8).

情形 1. 多项式的幂次 $m+1$ 为奇数. 我们从 E 平面去掉线段 (E_0E_1), $\cdots$, $(E_{m-2}E_{m-1})$, $(E_m\infty)$ (也可以说,我们作出一些截口). 曲面 Γ 的其余部分分成两块 D_1 和 D_2, 这两块的边界(截口的“边岸”)相同. 把这两块顺着被挖去线段的边缘粘合起来之后，便得到亏格 $g=m/2$ 的曲面(带有 g 个“环柄”的球面). 严格说来,从这种曲面挖去了一点——无穷远点,因到现在为止,我们仍在 E 平面的有限部分上研究黎曼曲面 Γ.

情形 2. 多项式 $R(E)$ 的幂次 $m+1$ 为偶数. 我们去掉线段 (E_0E_1), $\cdots$, (E_mE_{m+1}); ∞ 不是支点. 其余的一切完全类似于图 8 所示的 $g=1$, $2(g=m/2)$ 的情形.

如同情形 (1) 一样, ∞ 点从 Γ 中去掉, 但扩充 E 平面的这种点已经不是支点. 实际上, 每一个叶 D_1, D_2 都有自己的无

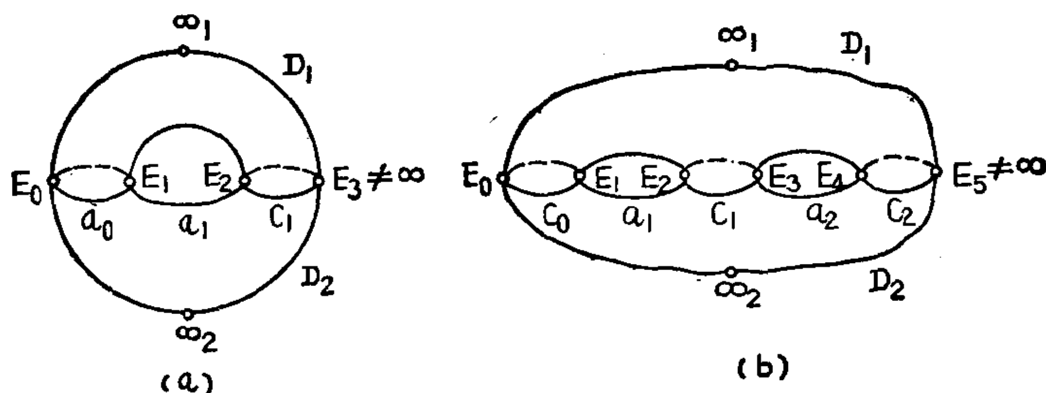


图 8. 曲面: a) 亏格 $g=1$, $y^2=\prod_{\alpha=0}^{3}(E-E_\alpha)$;

b) 亏格 $g=2$, $y^2=\prod_{\alpha=0}^{5}(E-E_\alpha)$.

穷远点 ∞_1 和 ∞_2, 把这种点从 Γ 中去掉, 我们暂且在 E 平面的有限部分上来研究黎曼曲面.

在具有无限带的周期性势的一维薛定谔方程理论中, 如果 $g(E)$ 的所有零点都是简单的, 那么在非代数黎曼曲面 Γ (其中 $y^2=g(E)$ (参看本章 § 1, § 3)) 上的布洛赫函数是亚纯的. 在图 9 中, 从拓扑学的角度画出这种黎曼曲面. 可以看出, 对于具有无限个简单零点的超越函数 $g(E)=1-a_R^2$ 来说, 在这种曲面上的无穷远点 ∞ 已经是闭链 a_j 的聚点; 这些闭链的尺度随 $j\to\infty$ 而逐渐缩小(这些闭链是从 E 平面上的禁带中得到的.)

代数黎曼曲面 (6) 具有"无穷远点", 把这些无穷远点连

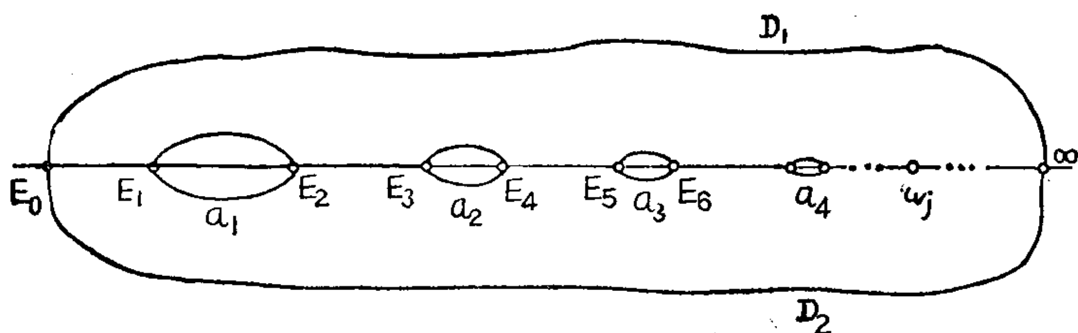


图 9. 无限亏格之曲面，$y^2 = \sqrt{g(E)}$，其中 $g(E)$ 是超越函数. 禁带的尺度随 $n \to \infty$ 而逐渐缩小.

接起来就表明作成了"闭的"(紧致的，没有边界的，即存在有限个环柄的)曲面 Γ. 图 7 和图 8 已经指出过超椭圆的例子. 下面我们来引进确定曲面 Γ 的无穷远点的形式程序. 曲面 Γ 由方程 (6) 也即由下面方程给出:

$$F = \sum_{i+j \leqslant m} a_{ij} y^i E^j = 0.$$

我们来考虑这样的"投影坐标" (u, v, w)，当 $E = v/w$ 时，$y = u/w$. 我们将认为向量 $(u, v, w) \neq 0$ 以及同它成比例(比例因子 λ 为复的)的向量确定同一点:

$$(u, v, w) \sim (\lambda u, \lambda v, \lambda w), \quad \lambda \neq 0. \tag{12}$$

如果 $w \neq 0$，则选取 $\lambda = 1/w$，于是总可以在向量 (u, v, w) 的等价类中求出形如 $(y, E, 1)$ 这样的向量，其中 $y = u/w$，$E = v/w$. 我们把 $w = 0$ 的诸点叫做"无穷远点".

方程 (6) 具有下面形式:

$$0 = \Phi = w^m F\left(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}\right) = \sum a_{ij} u^i v^j w^{m-i-j}. \tag{13}$$

同时多项式 $\Phi(u, v, w)$ 还是幂次为 m 的齐次多项式:

$$\Phi(\lambda u, \lambda v, \lambda w) = \lambda^m \Phi(u, v, w). \tag{14}$$

在过渡到变量 y，E 之后，方程 $\Phi = 0$ 的有限解(即 $w \neq 0$) 等于曲面 Γ. 除此之外，还存在有限个无穷远点，这些无穷远

点由下面这对方程给出:

$$\Phi = 0,\ w = 0. \tag{15}$$

要注意到,向量 (u, v, w) 与 $(\lambda u, \lambda v, \lambda w)$ 确定同一个点.

整个黎曼曲面和无穷远点,在投影坐标中都由方程 $\Phi = 0$ 给出. 在曲面 Γ 上,靠近无穷远点 $w = 0$ 的局部坐标是这样选取的: 如果点 $P = (u_0, v_0, 0)$ 是无穷远点,且 $u_0 \neq 0$,那么在此点的邻域内应过渡到下面坐标:

$$(\tilde{y}, \tilde{E}) = \left(\frac{v}{u}, \frac{w}{u}\right), \ P = \left(\frac{v_0}{u_0}, 0\right)$$

而方程 $\varphi(u, v, w) = 0$ 简化为这样的形式: $\Phi(u, v, w) = u^m \tilde{F}(\tilde{y}, \tilde{E}) = 0$ $(u \neq 0)$. 其次,如果点 P 为非奇异(即 $\nabla_c \tilde{F} \neq 0$),那么靠近此点的局部坐标同原先一样选取,但采用了变量 $\tilde{y}$, $\tilde{E}$.

对超椭圆曲面 Γ 我们有下面两种情形.

情形 1. $y^2 = R(E)$,其中 $R(E)$ 的幂次为奇数. 这种情形存在一个作为支点的无穷远点 $P = \infty$. 在曲面 Γ 上,靠近此点的局部坐标为 $z = 1/\sqrt{E}$. 对于在曲面 Γ 上的函数来说,按变量 z 展开——在点 $P = \infty$ 附近按 z 展成泰勒级数. 例如,曲面 Γ 在 E 平面上的投影,可以看作曲面 Γ 上的点 Q 的数值函数 $E(Q)$. 这种函数具有下面性质: 1) 在点 $P = \infty$ 处,函数 E 有二阶极点; 2) 在曲面 Γ 上的所有支点处,函数 $E(Q)$ 的梯度皆为零.

情形 2. $y^2 = R(E)$,其中 $R(E)$ 为偶次多项式. 这种情形有两个无穷远点 $P_1 = \infty_1$, $P_2 = \infty_2$, 因为无穷大不是支点,因而它落到曲面 Γ 的两个叶上. 在两点 $P_1 = \infty_1$、$P_2 = \infty_2$ 附近的局部坐标,可以取作量 $z = 1/E$. 在 E 平面上的投影为曲面 Γ 上点 Q 的数值函数 $E(Q)$; 在点 P_1 和 P_2 处,这种函数有两个简单极点,并且在所有支点处此函数的梯

度皆为零.

现在我们来研究黎曼曲面的闭链问题. 有向闭曲线 γ（切线正切不为零的光滑曲线或者具有有限个尖点的分片光滑曲线）自然将作为曲面 Γ 上的闭链. 若干个有向闭曲线 γ_j（彼此也可能相交）的形式和也将算作闭链:

$$\text{闭链}\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k, \tag{16}$$

式中 γ_j 是有向闭曲线.

一些同样的曲线，但方向相反，则它们的形式和称为闭链 $-\gamma$. 于是，我们描述了闭链. 我们还需要明确地讲明，究竟什么样的闭链将认为是彼此等价的，以及什么样的闭链等价于零. 我们引入一种等价关系，在拓扑学上，这种等价关系叫做"闭链的同调性". 两条闭曲线的同调性要比它们的"同伦性"更强. 两条闭曲线如果在曲面 Γ 范围内可以从其中一条经过连续变形而变成另一条，则称它们是同伦的. 下面我们来讲几条规则.

1. 如果两个闭链 γ 和 $\tilde{\gamma}$ 彼此同伦（即在 Γ 内经过连续变形从一个变成另一个），那么二者当然也是同调的.

2. 此外，允许把一个有向闭曲线分成若干个闭部分，从而可调换它们的穿过次序（图 10）:

$$\gamma \approx \gamma_1 + \gamma_2 \approx \gamma_2 + \gamma_1,$$

$$\gamma \approx \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \approx \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_2 \approx \cdots,$$

其中记号≈表示等价性（同调性）.

3. 由不自交且两两也不相交的有向曲线的集合组成闭链 $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$, 如果诸曲线的这一集合限制在曲面 Γ 的某一块上且曲线 γ_j 皆属于该块的具有规则定向的边界（图 11），那么这种闭链 γ 同调于零. 如果闭链之和 $\gamma_1 + \gamma_2$ 等价于零，那么 $\gamma_1 \approx -\gamma_2$. 如果 $\gamma \approx 0$, 那么 $\gamma_1 + \gamma \approx \gamma_1$ 等等. 我们应用规则 1, 2, 3 便能从一个闭链得到与它等价（同

调)的所有闭链.



$$\gamma \approx \gamma_1 + \gamma_2 \approx \gamma_2 + \gamma_1$$

图 10. 闭链的同调性,比同伦更粗的概念.

等价闭链类构成“一维同调解”, 这种群在拓扑学上用 $H_1(\Gamma)$ 来表示.

在曲面 Γ 的一维同调群中,还存在一个重要的运算(除闭链的加法和减法之外),这种运算称之为“闭链之交”. 我们还将假定在曲面 Γ 上定义“右”、“左”基底这一概念(对曲面加以定向); 由于黎曼曲面是复的(所利用的全部坐标代换都是复解析的,因而具有正的雅可比行列式),因此这一概念对黎曼曲面总是对的.

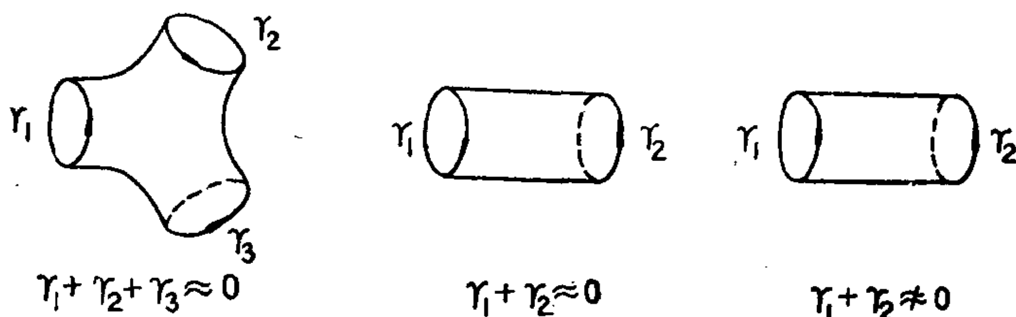


图 11. 闭链同调性的例子.

两个有向闭曲线 γ_1 和 γ_i 的交指数 $\gamma_1 \circ \gamma_2$ 是这样确定的:

1. 在曲面 Γ 上, 假定曲线 γ_1 和 γ_2 在有限个点上都以非零角度相交. 我们用 $P_\alpha(\alpha = 1, \cdots, q)$ 表示交点. 每个点 P_α 都有两个向量 $\dot{\gamma}_1$ 和 $\dot{\gamma}_2$. 我们令

$$\begin{aligned} &\mathrm{sign} P_\alpha = 1, \text{ 如果标架 } (\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) \text{ 在点 } P_\alpha \text{ 处为右标架的话}, \\ &\mathrm{sign} P_\alpha = -1, \text{ 如果标架 } (\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2) \text{ 在点 } P_\alpha \text{ 处为左标架的话}. \end{aligned} \tag{17}$$

相交指数等于

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 = \sum_{\alpha=1}^{q} \operatorname{sign} P_\alpha = -\gamma_2 \circ \gamma_1.$$

2. 如果一对曲线 γ_1、γ_2 相交不满足条件 1 的要求，则应将 γ_2 变形，使得一对 γ_1、γ_2 之交满足条件1，然后取交. 因此这种情形也将有交指数.

3. 根据定义，交指数关于两个变数是可加的、反对称的且有整数值

$$\begin{aligned}(\gamma_1 + \tilde{\gamma}_1) \circ \gamma_2 &= \gamma_1 \circ \gamma_2 + \tilde{\gamma}_1 \circ \gamma_2, \\ \gamma_1 \circ \gamma_2 &= -\gamma_2 \circ \gamma_1.\end{aligned} \tag{18}$$

4. 在同调闭链类中，交指数是确定的（同调于零的闭链与其它任何闭链的交指数等于零）.

在 n 类闭曲面上，把这样的一种闭链集合 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ 称为闭链的正则基底：其中所有 a_i, b_i 都是独立的且交指数矩阵按下面形式来构造(图 12):

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}. \tag{19}$$

在超椭圆黎曼曲面 $y^2 = R(E)$ 上，我们来计算以后我们所需要的两种情形中闭链的正则基底，这两种是 $R(E)$ 的幂次为偶数和奇数的情形.

情形 1. $R(E)$ 的幂次为奇数. 支点形式为 $E_0 < E_1$

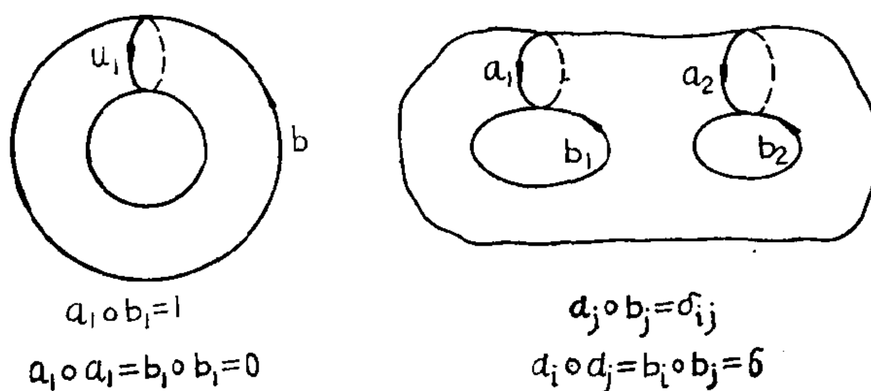


图 12. 闭链的交指数. 曲面上闭链的正则基底.

$<\cdots<E_{2n}<\infty$. 曲面Γ有以下两种闭链集合:

a) 闭链 a_i: a_1, $\cdots$, a_n. 它们在曲面Γ的禁带(E_1E_2), $\cdots$, $(E_{2i-1}E_{2i})$, $(E_{2n-1}E_{2n})$ 上面.

b) 闭链 c_j: c_0, $\cdots$, c_n. 它们在曲面Γ的全部准许带(总共有 $n+1$ 块) (E_0E_1), $\cdots(E_{2n}\infty)$ 上面. 把闭链 c_0, $\cdots$, c_n 从曲面Γ中去掉, 我们把曲面分成两部分(作成了截口). 由此我们有

$$c_0+c_1+\cdots+c_n\approx 0. \tag{20}$$

对 $n=1,2$ 的情形,交矩阵容易从图 7 看出:

$$a_i\circ a_j=0,\ c_\alpha\circ c_\beta=0,$$

$$c_0\circ a_1=a_1\circ c_1=c_1\circ a_2=a_2\circ c_2=\cdots=a_n\circ c_n=1. \tag{21}$$

所有其余的交等于零. 对亏格 $g=1$ 的情形, 闭链 a_1, $b_1=c_1$, $a_1\circ b_1=1$ 构成正则基底. 要注意到正则基底 a_1, $-c_0$ 同前面的 a_1, c_1 相等,因为 $c_0+c_1\approx 0$. 对任何亏格 $n\geqslant 1$ 的情形,正则基底有这样的形式:

$$a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n, \tag{22}$$

其中

$$b_1=-c_0,\ b_2=-c_1-c_0,$$

$$b_3=-c_2-c_1-c_0,\cdots,b_n=-\sum_{j=0}^{n-1}c_j.$$

从公式 (21) 得到关系式

$$a_i\circ a_j=b_i\circ b_j=0(a_i\circ b_j=\delta_{ij}). \tag{23}$$

情形2. $R(E)$的幂次为偶数. 支点形式为 $E_0<E_1<\cdots<E_{2n+1}$. 同奇数情形完全类似(∞点用 E_{2n+1} 来代替)在这里也引进闭链 a_1, $\cdots$, a_n, c_0, $\cdots$, c_n, 它们满足关系式 (20), (21)(参看图 8). 因此闭链的正则基底写成 (22) 的形式.

存在正则基底 a_i, b_i 是黎曼曲面封闭性和定向性的结果. 但这种情形不是在所有二维曲面(流形)上都成立. 例如, 如

果在平面任何几个点上穿洞打眼，那么将有非平凡的闭链(独立闭链数等于洞眼数)，但交指数恒等于零．在有定向的闭曲面上，基底闭链的交矩阵行列式为 ± 1，并且交矩阵是反对称的，因此存在正则基底 (23)．

§7. 黎曼曲面上的微分．阿贝尔(全纯的)微分以及具有极点的微分

让我们注意到，在以 x、y 为坐标的平面区域中，表达式

$$\Omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \tag{1}$$

称为微分(或者称为一次微分形式)．式中一对 (P, Q)，在坐标变换中同函数的梯度分量(具有一个下标的一秩张量)行为一样：

$$x = x(x', y'), \quad y = y(x', y'), \tag{2}$$

$$\Omega = Pdx + Qdy = P'dx' + Q'dy'$$
$$= \left(P\frac{\partial x}{\partial x'} + Q\frac{\partial y}{\partial x'}\right)dx' + \left(P\frac{\partial x}{\partial y'} + Q\frac{\partial y}{\partial y'}\right)dy'.$$

当讨论任意二维曲面(二维流形)时，则微分 Ω 在全平面上都应该有定义，并且在任何局部坐标系 x_α、y_α 中，微分 Ω 写成 (1) 的形式，其中 $\Omega = P_\alpha dx_\alpha + Q_\alpha dy_\alpha$；在两个局部坐标系 x_α、y_α 以及 x_β、y_β 的运算区域中，一个坐标用另一个来表示：

$$\begin{aligned} x_\alpha &= x_\alpha(x_\beta, y_\beta), \\ y_\alpha &= y_\alpha(x_\beta, y_\beta). \end{aligned} \tag{3}$$

因此，同一个微分 Ω 在坐标 x_α、y_α 及 x_β、y_β 中的两个不同写法，在两个坐标系的共同运算区域中应根据公式 (2) 相互变换．

实质上，微分(或一次微分形式)乃是具有一个下标的一秩张量所写成的微分形式．(在任何 n 维流形中，任何 k 次微

分形式 $\Omega=\sum\limits_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^k$ 恰好也一样，乃是具有所有下标的 k 秩反对称张量所写成的简单形式．这些 k 阶微分形式可用绝对不变形式沿着在流形中的任何 k 维曲面来积分．所谓绝对不变形式就是结果不依赖于曲面和流形中的度规和坐标*⁾.)

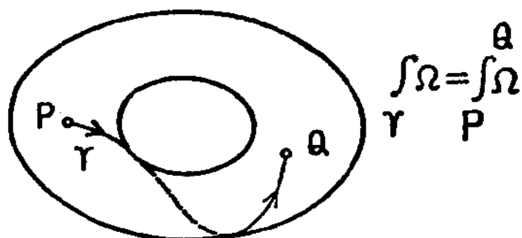


图 13. 一次形式 Ω 在曲面上沿路径 γ 的积分.

在黎曼曲面上，微分 Ω 显然可以沿此曲面的点 P 和 Q 间的任何一条(有向的)路径 γ 作积分(图 13).

微分 Ω 称为闭的，如果满足恒等式(在任何局部坐标系中):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{4}$$

并且如果在曲面上存在这样一个处处有定义的光滑的单值数值函数 f，使得在任何坐标系中微分 Ω 的分量成为此函数的

---

*⁾ 译者认为这里所提到的"绝对不变形式"(абсолютно инвариантный обриз)是指微分形式的性质与曲面和流形中的度规和坐标选取无关．例如，k 次形式 Ω 的外微分 $d\Omega$ ($k+1$ 次形式)的定义与坐标选取无关；令 V 为 n 维流形中任何一个 $k+1$ 维的光滑的有定向的子流形，则 Stokes 公式 $\int_V d\Omega=\int_{\partial V}\Omega$ 与空间度规的选取无关；而积分 $\int_{\partial V}\Omega$ 的确定与坐标选取无关．诸如此类，不一一列举．书中本节所提到的一次微分形式的性质也都具有这种意义上的"绝对不变形式"．(例如图 13 中的积分 $\int_\gamma \Omega$，结果与坐标系选取无关．)——译注

梯度分量，则微分 Ω 叫做恰当的.（恰当的微分永远是闭的.）

微分的性质如下：

1. 恰当微分沿曲面上的任何闭链的积分等于零.

2. 闭微分沿等价(同调)于零的闭链积分恒等于零.

3. 在曲面上，如果闭微分沿闭链的所有积分是已知的，那么这种微分在精确到附加任何一个恰当微分范围内是唯一确定的. 我们感兴趣的二维流形(黎曼曲面)的全部有关定义都是用复解析函数作出的. 在 § 6 中在黎曼曲面上曾引入过的所有局部坐标都是这样的坐标：从一个局部坐标系变成另一个都是用保角变换来实现的.

通常，对这种情形引入复坐标是方便的：

$$z = x + iy, \bar{z} = x - iy$$

而微分

$$dz = dx + idy,\ d\bar{z} = dx - idy. \tag{5}$$

如果形式上引入算子

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),\end{aligned} \tag{6}$$

则函数的微分将有下面形式：

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}. \tag{7}$$

任何形如 (1) 的微分 Ω 可以写成下面形式：

$$\Omega = Pdx + Qdy = Adz + Bd\bar{z}. \tag{8}$$

闭条件 (4) 具有下面形式：

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \longleftrightarrow \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial B}{\partial z}. \tag{9}$$

大家知道，函数 $f(z)$ 的复解析性条件(柯西-黎曼方程)有下

面形式:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \tag{10}$$

或者

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

让我们研究任何一个形如下面的闭微分:

$$\Omega = Adz, \tag{11}$$

这时闭条件(9)有下面形式:

$$\partial A/\partial \bar{z} = 0.$$

因此,形如(11)的闭微分系数A是复解析的,反之亦然. 今后,我们将把这样的微分叫做全纯的.

自然,系数A的极点叫做形如(11)的微分的极点;所有这些概念相对于下面的全纯(解析)代换是不变的:

$$z = z(w), \ z = x + iy, \ w = x' + iy', \tag{12}$$
$$\partial z/\partial \bar{w} = 0,$$

因而在§6中研究过的且由形如(6.6)的复解析方程给出的黎曼曲面上,所有这些概念也都有效.

在形如(6.6)的代数黎曼曲面(无穷远点也归于这个曲面(参看§6))上,最重要的微分是所谓在黎曼曲面Γ上的阿贝尔微分或处处全纯的微分(有时也叫一类微分),这种微分在这种曲面的任何处(其中也包括Γ的无穷远点)都没有极点.

除此之外,在曲面Γ上刚好存在一个极点的全纯微分(二类微分)对我们来说也将是重要的. 如果P是曲面Γ的点(微分Ω在此点上有唯一的极点),而$z = x + iy$是在曲面Γ上靠近点P附近的局部坐标,那么当z趋于零时我们有

$$\Omega = dz\left(\sum_{k=n}^{1}\frac{a_{-k}}{z^k}+f(z)\right), \tag{13}$$

式中 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处是解析的． 对这样的(有一个极点的)微分来说，被加数 a_{-1}/z 永远等于零(在闭曲面 Γ 上)．称数目 a_{-1} 为微分 Ω 在点 P 的留数。留数与局部坐标 z 的选择无关。

更为普遍的事实如下：如果全纯微分 Ω 在闭曲面 Γ 上刚好有 k 个极点 $P_1, \cdots, P_k$，而 $a_{-1}^{(1)}, \cdots, a_{-1}^{(k)}$ 是全纯微分 Ω 在极点 $P_1, \cdots, P_k$ 处的留数，那么留数的和等于零：

$$\sum_{q=1}^{k} a_{-1}^{(q)} = 0. \tag{14}$$

对我们来说，微分 Ω^{PQ} (“偶极子的”)也将是重要的；这种微分在 Γ 中的点 P 和 Q 上刚好有两个一阶极点，其留数分别为 1 和－1(三类微分)．

以下定理是有名的：

1) 在黎曼曲面 Γ (代数的)上，总是存在阿贝尔微分(一类)的基底 $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$，其中数目 n 等于曲面的亏格．任何一个处处全纯的(阿贝尔)微分 Ω 是诸基底的带有复常系数的线性组合：

$$\Omega = \sum \alpha_k \Omega_k.$$

2) 在黎曼曲面 Γ 上，任何一个处处有定义的光滑的并且是闭的(不一定全纯的)微分 $\tilde{\Omega}$ 表示为以下两项之和的形式：一项是恰当微分，而另一项是基底的阿贝尔微分 $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$ 与它们的复共轭 $\bar{\Omega}_1, \cdots, \bar{\Omega}_n$ 的某一线性组合． 闭微分的线性空间维数(不计恰当微分)等于 $2n$，其中 n 为亏格(环柄数)．

现在让我们研究一个例子——超椭圆黎曼曲面，这对我们来说是最重要的．

对由方程 $y^2+R(E)=0$（式中 $R(E)=E-E_0$，或者 $R(E)=(E-E_0)(E-E_1)$）所给出的亏格 $n=0$ 的曲面来说，由于阿贝尔微分数目等于亏格，故这种情形一般没有阿贝尔微分．下面我们研究多项式 $R(E)$ 的普遍情形．在曲面 Γ 上，任何一个全纯微分（可能有极点）在 E 平面的有限部分内可写成下面形式（多项式 $R(E)$ 的根是非多重的）：

$$\Omega=\frac{P(E)}{Q(E)}\frac{dE}{\sqrt{R(E)}}+\text{平凡的}, \tag{15}$$

式中 Q 和 P 是多项式； 平凡部分的形式为 $P_1(E)dE/Q(E)$（P_1 和 Q_1 是 E 的多项式）．我们来研究微分 Ω 的非平凡部分的极点．这些极点可以有以下形式：a）在 $Q(E)$ 等于零处，b）在支点 E_α 处，$R(E_\alpha)=0$，c）在无穷远点 $E=\infty$ 处．情形 c）我们稍后一会再研究．

a）在任何 $E\neq E_\alpha$ 的点处，Ω 的极点只能在 $Q(E)$ 等于零处．

b）如果我们处在曲面 Γ 的支点即 $E=E_\alpha$，$y=0$ 处，那么根据 § 6，应选择 y 作为此点附近的局部坐标．完成代换 $E(y)$ 之后，我们得到

$$\Omega=\frac{dE(y)}{y}\frac{P(E(y))}{Q(E(y))}. \tag{16}$$

因在点 E_α 附近，$R(E)\sim(E-E_\alpha)\text{const}$，那么我们有

$$\Omega=\frac{d(E-E_\alpha)}{y}\frac{\tilde{P}(E-E_\alpha)}{\tilde{Q}(E-E_\alpha)},$$

并且在 E_α 附近，$E-E_\alpha\sim\text{const}+y^2$．最后我们得到

$$\Omega=dy\frac{\tilde{P}(y^2)}{\tilde{Q}(y^2)}. \tag{17}$$

由此可见，只有多项式 $Q(E)$ 在点 $E=E_\alpha$ 处等于零的情形，微分 Ω 在黎曼曲面 Γ 的 $y=0$、$E=E_\alpha$ 处才有极点．如果我

们希望找到没有极点的阿贝尔微分，我们就应寻求下面形式的阿贝尔微分：

$$\Omega = \frac{P(E)dE}{\sqrt{R(E)}}, \tag{18}$$

式中 $P(E)$ 是多项式. 在 E 平面的有限部分上，形如 (18) 的微分在曲面 Γ 上没有极点.

现在我们来研究两种情形.

情形 1. 多项式 $R(E)$ 的幂次为奇数，

$$R(E) = \prod_{\alpha=0}^{2m} (E - E_\alpha), \ E_\alpha \neq E_\beta.$$

正象在 § 6 中曾指出的那样，在曲面 Γ 上，存在一个无穷远点 $E = \infty$，而此点附近的局部坐标为参数 $z = 1/\sqrt{E}$. 如果微分 Ω 是 (18) 这种形式，其中 $P(E) = a_0 + \cdots + a_n E^n$ 且 $a_n \neq 0$，那么在 $z = 0$ 附近 $E(z)$ 作代换之后，我们得到 $(E = z^{-2})$

$$\Omega = \frac{dz^{-2}(a_n + z^2 a_{n-1} + \cdots + a_0 z^{2n})}{z^{2n} z^{-2m-1} \quad \sqrt{\prod_{\alpha=0}^{2m} (1 - E_\alpha z^2)}} \tag{19}$$

或者当 z 很小时，最后得到

$$\Omega = -2z^{2m-2n-2} dz(a_n + f(z)), \tag{20}$$

式中 $a_n \neq 0$ 而 $f(z)$ 是解析的，且在点 $z = 0$ 处 $f(z)$ 等于零.

于是，我们可作出以下推论:

1. 如果多项式 $P(E)$ 的幂次为 $0, 1, \cdots, m-1$，其中 m 是曲面 Γ 的亏格，那么形如 (18) 的微分 Ω 在任何处(其中包括点 $E = \infty$) 都没有极点. 我们有下面形式的阿贝尔微分基底:

$$\Omega_i = \frac{E^i dE}{\sqrt{R(E)}}, \ i = 0, \cdots, m-1. \tag{21}$$

2. 如果多项式 $R(E)$ 的幂次为 $m+k$，那么形如(18)的微分 Ω 在 Γ 上的点 $z=0$ 处存在唯一的极点(二类)，并且极点的重数等于 $2k+2$，其中 $k=0,1,2,\cdots$. 从(19)得到在此极点处的罗兰级数展开式只含有偶次幂 $z^{-2k-2},\cdots,z^{-2i},\cdots,z^{-2}$:

$$\Omega=\left[\frac{a_{-2k-1}}{z^{2k+2}}+\cdots+\frac{a_{-2}}{z^2}+\varphi(z)\right]dz; \qquad (22)$$

当 $z=0$ 时，$\varphi(z)$ 是解析的.

情形 2. 多项式 $R(E)=\prod_{\alpha=0}^{2m+1}(E-E_\alpha)$ 的幂次为偶数且 $y^2+R(E)=0$ 的根是不同的，即 $E_\alpha\neq E_\beta$. 在 E 平面的有限部分内所有讨论同上面完全类似，并且形如下面的微分在这里没有极点:

$$\Omega=\frac{dEP(E)}{\sqrt{R(E)}}, \qquad (23)$$

式中 $P(E)=a_nE^n+\cdots+a_0,\ a_n\neq 0$

根据 § 6，在 Γ 上有两个无穷远点，它们的局部坐标可以取作(在两个无穷远点处) $z=1/E$. 在以 z 为坐标的点 P_+, P_- 附近，微分 Ω 有下面形式:

$$\Omega\approx\mp z^{m-n-1}dz(a_n+\varphi(z)), \qquad (24)$$

式中 $\varphi(z)$ 在 $z=0$ 附近是解析的且 $\varphi(0)=0$. 如果 $m-n-1\geqslant 0$，则微分 Ω 为阿贝尔微分(无极点). 根据 § 6，曲面 Γ 的亏格等于 m. 我们恰好得到形如 (23) 的 m 个独立的阿贝尔微分:

$$\Omega_i=\frac{E^idE}{\sqrt{R(E)}},\ i=0,\ \cdots,\ m-1. \qquad (25)$$

如果 $n=m$ 且 $a_n=1$，那么微分 Ω 在点 P_+, P_- 处有两个一阶极点，其留数为 ± 1. 正和 § 6 中的情形一样，这里 P_+ 和

P_- 是两个无穷远点．作为第一个实例，我们来看一下，在 § 5 中的同薛定谔算子的有限带势及势的动力学(借助于 KdV 方程和KdV 的高阶类似物)相联系的各种公式中，实际上我们已经碰到什么样的微分形式．

1. 亏格等于 1 的曲面：$y^2 + R(E) = 0$，式中 $R_3(E) = (E - E_0)(E - E_1)(E - E_2)$，所有 E_0，E_1，E_2 皆为实的且 $E_0 < E_1 < E_2$．如果 $u(x)$ 是单带的拉梅势且 E_0、E_1、E_2 是带的端点，那么在这种曲面 Γ 上，布洛赫本征函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 实际上是亚纯的(参看 § 5)．我们有一个阿贝尔微分：

$$\Omega_1 = \frac{dE}{\sqrt{R(E)}}.$$

此微分沿 Γ 上的路径积分作为端点的函数则是 E 平面的多值函数：

$$x = \int_{P_0}^{Q} \Omega_1. \tag{26}$$

我们把点 P_0，Q 选在禁带(即 E 平面的线段 $[E_1, E_2]$) 之上的曲面 Γ 中的闭链 a_1 上面(参看 § 6)．于是，(26) 的反函数将是实的周期性函数 $Q(x)$．根据 (5.4)，势 $u(x - x_0)$ 的公式为

$$u(x - x_0) = -2Q(x) + \sum_{\alpha=0}^{2} E_\alpha.$$

(26) 的反函数是复变数 x 的双周期函数．　它称作维尔斯特拉斯椭圆函数(用 $\wp(x)$ 来表示)．借助于 KdV，$u(x)$ 的变化有下面形式：

$$\begin{aligned} &u(x, t) = u(x - ct), \\ &u(x, 0) = u(x), \quad c = \sum E_\alpha/2. \end{aligned} \tag{27}$$

2. 亏格等于 2 的曲面，

$$y^2 + R_5(E) = 0, \quad R_5 = \prod_{\alpha=0}^{4} (E - E_\alpha),$$

$$E_0 < E_1 < \cdots < E_4 < \infty.$$

对于双带势 $u(x)$ 来说，函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 在 Γ 上是亚纯的（参看§5）．这里有两个阿贝尔微分：

$$\Omega_1 = \frac{dE}{\sqrt{-R_5(E)}}, \quad \Omega_2 = \frac{EdE}{\sqrt{-R_5(E)}}.$$

在计算双带势的解析形式时，我们又一次引入了逆函数 $F_1(\tau)$，$F_2(\tau)$（参看 (5.7)—(5.9)），

$$\tau = \int_{E_1}^{Q} \Omega_1, \quad \tau = \int_{E_3}^{Q} \Omega_1,$$

式中 Q 取在第一个或第二个禁带上（即取在 Γ 的闭链 a_1 或 a_2 上）．当借助于 KdV 来计算双带势 $u(x, t)$ 的时间动力学时，在公式 (5.29) 中出现微分 Ω_2．现在让我们回忆一下，在黎曼曲面上存在闭链的正则基底 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$，它们的交指数为 (6.19)．用以下非平凡关系（黎曼）将阿贝尔微分集合 $\Omega_1, \cdots, \Omega_n$ 同闭链的基底联系起来：

1. 沿闭链 a_k 的积分矩阵是非简并的：

$$b_{k_j} = \oint_{a_j} \Omega_k, \quad \det b_{k_j} \neq 0.$$

因此，可以选择新的微分基底 $\tilde{\Omega}_j$，使得

$$\oint_{a_q} \tilde{\Omega}_j = \delta_{q_j} \cdot 2\pi i, \quad i^2 = -1. \tag{28}$$

2. 在基底 $\tilde{\Omega}_j$ 中，沿闭链 b_q 的积分矩阵 b_{q_j} 即

$$b_{q_j} = \oint_{b_q} \tilde{\Omega}_j$$

具有对称性质：$b_{qk} = b_{kq}$，并且它的实部 $\mathrm{Re} b_{qk} = \mathrm{Re} b_{kq}$ 是负定的．

如果黎曼曲面是超椭圆的，并且所有支点是实的，那么 b

周期矩阵 b_{ij} 是实的、对称的和负定的．下面让我们来研究最简单的 θ 函数(黎曼)：

$$\theta(\eta_1, \cdots, \eta_n) = \sum_{m_1,\cdots,m_n} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k,j} b_{kj}m_k m_j + \sum_k \eta_k m_k\right\}. \tag{29}$$

从 $\mathrm{Re}b_{kq}$ 的性质得到，级数 (29) 很快收敛并且决定一个复变量 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 的解析整函数 θ．如果曲面的亏格 $g=1$，则黎曼 θ 函数简化为通常的单个复变量的雅可比 θ 函数：

$$\theta(\eta) = \sum_m \exp\left\{\frac{1}{2} bm^2 + m\eta\right\},$$

式中的 m 都是整数．

从黎曼 θ 函数的定义得到

$$\theta(\eta_1, \cdots, \eta_k + 2\pi i, \cdots, \eta_n) = \theta(\eta_1, \cdots, \eta_k, \cdots, \eta_n), \tag{30}$$

$$\begin{aligned}&\theta(\eta_1 + b_{k1}, \cdots, \eta_n + b_{kn})\\&\quad = \exp\{-b_{kk}/2 - \eta_k\}\theta(\eta_1, \cdots, \eta_n).\end{aligned}$$

恒等式 (30) 表明，黎曼 θ 函数是同 n 维复线性空间 C^n 中的 $2n$ 个向量所组成的所谓雅可比点阵有关．这 $2n$ 个向量 $e_1, \cdots, e_n, e'_1, \cdots, e'_n$ 有下面形式：

$$\begin{aligned}e_k &= (0, \cdots, 0, 2\pi i, 0, \cdots, 0),\\ e_k &= (b_{k1}, \cdots, b_{kn}).\end{aligned} \tag{31}$$

任何一个雅可比点阵向量，其形式皆为 $\sum m_q e_q + \sum n_q e'_q$，其中 m_q，n_q 都是整数．实质上，点阵 (31) 是由黎曼曲面 Γ 上的阿贝尔微分沿着基底闭链 a_i，b_i（且归一化条件为 (28)）之周期矩阵所给出的．对曲面的亏格 $g=1$ 的情形，通常我们有复平面之点阵．对 $g \geqslant 1$ 的一般情形，C^n 关于点阵之商群乃是 $2n$ 维复的环面．在数学文献上，把这种环面叫做"黎曼曲面 Γ 的雅可比簇 (Jacobian *variety*)"．

§8. 布洛赫本征函数和准动量、同它们有关的黎曼曲面上的微分，它们的时间动力学

让我们来研究薛定谔算子 $L=-d^2/dx^2+u$ 的周期性有限带势 $u(x)$ 以及在 §1 中所定义的这种算子的布洛赫本征函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 和准动量 $p(E)$，$\hat{T}\psi_\pm=\exp(\pm ipT)\psi_\pm$，$\hat{T}$ 是对周期的平移算子． 在 §4 中我们已经阐述了函数 $\psi_\pm$ 在黎曼曲面 Γ 上的解析性质，其中黎曼曲面 Γ 形式为

$$y^2+R(E)=0,\quad R(E)=\prod_{\alpha=0}^{2n}(E-E_\alpha),\ E_\alpha \text{ 是带的端点}.$$

在黎曼曲面 Γ 上，我们来研究下面形式的微分：

$$W=\left(\frac{\partial\ln\psi_\pm}{\partial E}\right)dE. \tag{1}$$

在曲面 Γ 上，包括无穷远点在内，微分 W 原来只有零点和极点．这是从函数 $\psi_\pm$ 的以下性质得到的：

1. 如果 $z=1/\sqrt{E}$ 是在 Γ 上靠近无穷远点附近的局部坐标，那么微分 W 在 $z=0$ 附近有下面形式：

$$W=i(x-x_0)dz(1/z^2+\varphi(z)),$$

式中函数 $\varphi(z)$ 在 $z=0$ 处是解析的． 当 $E\to\infty$ 时从下面的渐近式得到这一性质：

$$\psi_\pm\sim\exp[\pm i\sqrt{E}(x-x_0)]$$

2. 在 E 平面有限部分内的微分 W 在 Γ 上具有下面性质：它在 $\psi_\pm$ 的零点处恰好有 n 个留数为 $+1$ 的一阶极点，而在 $\psi_\pm$ 的极点处恰好有 n 个留数为 -1 的一阶极点．让我们提醒一下，根据 §4，函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 的零点和极点分别相应于点 $Q_j=(\gamma_j(x), \pm)$ 和 $P_j=(\gamma_j(x_0), \pm)$，而这些点在曲面 Γ 上，都单独地放在禁带 $[E_{2j-1}E_{2j}]$ 上或者象我们指出过的那样，放在闭链 a_j 上．

3. 在黎曼曲面 Γ 上，由于微分 W 的定义 (1)，它沿路径积分的指数函数给出下面的单值函数:

$$\psi_{\pm}(x, x_0, E) = \exp\left\{\int_{Q_0}^{Q} W\right\}, \tag{2}$$

式中 $Q = (E, \pm)$ 是曲面 Γ 的点，Q_0 是起始点，并且沿着连结 Γ 上的此两点的任何一条路径来作上面的积分. 从函数 $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ 在 Γ 上的单值性得出一个重要结论: 在曲面 Γ 上，W 沿闭链的所有积分都等于 $2\pi i$ 的整数倍:

$$\oint_{a_j} W = 2\pi i m_j, \quad \oint_{b_j} W = 2\pi i n_j, \tag{3}$$

式中 m_j 和 n_j 都是整数.

结果得到，在任何一个闭的黎曼曲面 Γ 上，函数 $\psi_{\pm}(x, x_0, E)$ 的性质 1—3 唯一地确定出函数 $\psi_{\pm}$；我们将把这样的函数 $\psi_{\pm}$ 叫做黎曼曲面 Γ 上的"Baker-Ахиезер 函数". 同时在下面，我们通过极点 P_j 之集合唯一地确定出零点 Q_j 之集合. 其中 P 为曲面 Γ 的点 (对我们的情形，$P = (E, \pm)$)，而 x, x_0 是参数。正象在 §4 中曾指出的那样，曲面 Γ 在 E 平面上的投影可算作数值函数 $f(P)$，按定义，其中 $f(E, \pm) = E$.

对于势 $u(x)$ 来说，公式 (4.19) 在 §4 中已经指出过，由此得到:

$$\begin{aligned} u(x) &= -2\sum_{j=1}^{n} \gamma_j(x) + \sum_{\alpha=0}^{2n} E_\alpha \\ &= -2\sum_{j} f(Q_j(x)) + \sum_{\alpha=0}^{2n} E_\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

在曲面 Γ 上，在 §6 中我们已经引入了闭链的正则基底 (a_j, b_j) 而在 §7 中引入了阿贝尔微分的归一化基底 $\tilde{\Omega}_j$(参看 (7.28))，其中

$$\oint_{a_j} \tilde{\Omega}_k = 2\pi i \delta_{jk}, \quad \oint_{b_j} \tilde{\Omega}_k = b_{jk} = b_{kj}. \tag{5}$$

现在我们来引入 II 类和 III 类归一化微分．我们来研究微分的几种形式，在由下面方程所给出的超椭圆曲面 Γ 上我们将用到它们:

$$y^2 + R_{2n+1}(E) = 0, \quad R_{2n+1}(E) = \prod_{\alpha=0}^{2n} (E - E_\alpha);$$

所有 E_α 是实的(谱带的端点)，$E_0 < E_1 < \cdots E_{2n}$.

a) II 类微分 ω_k: 这类微分仅在局部坐标为 $z = 1/\sqrt{E}$ 的无穷远点处有极点,在此点附近要求满足等式

$$\omega_k = dz\left(\frac{1}{z^{2k+2}} + \varphi(z)\right), \tag{6}$$

式中 $\varphi(z)$ 当 $z = 0$ 时是解析的，$k = 0, 1, 2, \cdots$，此外还要求微分 ω_k 用下面条件归一化:

$$\oint_{a_j} \omega_k = 0. \tag{7}$$

条件 (6) 和 (7) 完全确定出 ω_k. 正如在 §7 中曾指出的那样，

$$\omega_k = \frac{dE}{\sqrt{R(E)}}\left(-\frac{1}{2} + a_{n+k-1}E + a_{n+k-2}E^2 + \cdots + a_n E^{n+k}\right), \tag{8}$$

式中系数 a_q 由条件 (6), (7) 确定．微分 ω_0 和 ω_1 对我们将尤为重要.

b) III 类微分 $\Omega^{P_j Q_j}$; 这类微分在点 P_j, Q_j 处有两个一阶极点,其中 P_j, Q_j 是布洛赫函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 的零点和极点,它们在曲面 Γ 的禁带 $[E_{2j-1}E_{2j}]$ 上面. 我们要求微分 $\Omega^{P_j Q_j}$ 的留数在点 P_j 处为 $+1$ 而在点 Q_j 处为 -1. 归一化条件如下:

$$\oint_{a_q} \Omega^{P_j Q_j} = 0,\ q = 1, \cdots, n. \tag{9}$$

从上面所指出的微分 $W = d_E \ln \psi_\pm$ 的性质，得出它的下面表示:

$$W = i(x - x_0)\omega_0 + \sum_{j=1}^{n} \Omega^{P_j Q_j} + \Omega, \tag{10}$$

式中 Ω 是阿贝尔微分

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} k_j \tilde{\Omega}_j, \tag{11}$$

及

$$\psi_\pm(x_1, x_0, E) = \exp\left\{\int_{a_0}^{a} W\right\},$$

式中 $Q = (E, \pm)$, Q_0 是在 Γ 上的某一起点.

W的表示 (10) 是从下面事实得到的: 在曲面 Γ 上，差

$$W - i(x - x_0)\omega_0 - \sum_j \Omega^{P_j Q_j}$$

已经没有极点，因而它是阿贝尔微分.

公式 (11) 的系数 k_j 可由 $\psi_\pm$ 的唯一性条件来确定，由此得到W的所有 a 的周期为 $2\pi i$ 的整数倍. 因此从 ω_0 和 $\Omega^{P_j Q_j}$ 的归一化条件(9)、(7)我们有

$$2\pi i m_j = \oint_{a_j} W = \oint_{a_j} \Omega = \oint_{a_j} \sum k_q \tilde{\Omega}_q, \tag{12}$$

式中 m_j 是整数. 从 $\tilde{\Omega}_q$ 的归一化条件 (5) 得到

$$2\pi i m_j = 2\pi i \sum_q k_q \delta_{jq} = 2\pi i k_j. \tag{13}$$

由此可见，所有 k_j 是整数，$k_j = m_j$. 现在我们来利用微分W的 b 周期的整数性条件:

$$2\pi i n_j = \oint_{b_j} W = i(x - x_0) \oint_{b_j} \omega_0$$

$$+\sum_{q=1}^{n}\oint_{b_j}\Omega^{P_qQ_q}+\sum_{q=1}^{n}m_q\oint_{b_j}\tilde{\Omega}_q. \quad (14)$$

令 $u_j=\oint_{b_j}w_0$ 是微分 w_0 的周期.

在阿贝尔微分理论中，存在一个重要关系式：如果 a_j, b_j 是正则基底，Ω^{PQ} 是在点 P, Q 处留数分别为 $+1$, -1 的 III 类偶极微分，其中点 P, Q 在曲面 Γ 上相应于一阶极点，并且如果对所有 $j=1,\cdots,n$, $\oint_{a_j}\Omega^{PQ}=0$, 那么可以从 P 到 Q 作一条路径 γ, 使得在归一化条件(5)的情形下，下面公式是正确的：

$$2\pi i\oint_{b_j}\Omega^{PQ}=\int_P^Q\tilde{\Omega}_j \quad (15)$$

(右边的积分沿路径 γ 进行).

对 b 周期的公式(14)，应用更普遍的关系式(15)，我们得到

$$2\pi i n_j-\sum_q m_q b_{jq}=i(x-x_0)u_j+\sum_{q=1}^{n}\int_{P_q(x_0)}^{Q_q(x)}\tilde{\Omega}_j, \quad (16)$$

式中 Q_q 和 P_q 为 $\phi_\pm$ 在 Γ 上的零点和极点，积分沿连结 Γ 上的点 P_j 和 Q_j 的某一路径. 让我们回忆一下，在复的 n 维空间中，我们曾引入了由向量 $e_1,\cdots,e_n$, $e_1',\cdots,e_n'$ 所构成的点阵，其中

$$e_j^\alpha=2\pi i\delta_j^\alpha,\quad e_j'^\alpha=\oint_{b_\alpha}\tilde{\Omega}_j=b_{\alpha j}=b_{j\alpha}.$$

关系式(16)可改写成下面形式：

$$\left(\sum_{q=1}^{n}n_q e_q+\sum_{q=1}^{n}m_q e_q'-i(x-x_0)U\right)^j=\sum_{q=1}^{n}\int_{P_q(x_0)}^{Q_q(x)}\tilde{\Omega}_j. \quad (17)$$

向量 U 的分量为 $U^j=\oint_{b_j}\omega_0$.

如果我们把右边的介于点 P_q 和 Q_q 之间的路径 γ_q 用任何一个闭链改变为 $\gamma_q \to \gamma_q + \sum\limits_k \lambda_{qk} a_k + \mu_{qk} b_k$（式中 λ_{qk}，μ_{qk} 为任意整数），那么整个向量将随某一点阵向量（e，e'）而变．我们注意到，左端是向量 $i(x-x_0)U$ 加上某一点阵向量．让我们引入向量 A，其分量等于

$$A^j(Q_1, \cdots, Q_n, P_1, \cdots, P_n) = \sum_{q=1}^{n} \int_{P_q}^{Q_q} \tilde{\Omega}_j. \qquad (18)$$

在公式 (17) 中，不计点阵向量，我们有

$$\begin{aligned} -i(x-x_0)U \cong A(Q_1(x), \cdots, Q_n(x), \\ P_1(x_0), \cdots\cdots, P_n(x_0)), \end{aligned} \qquad (19)$$

式中符号≅表示精确到任何一个点阵向量的等式．

让我们回忆一下，ψ 在 Γ 上的零点和极点曾有下面形式：

$$Q_j = (\gamma_j(x), \pm), \quad P_j = (\gamma_j(x_0), \pm).$$

对于 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 这种集合并考虑到它们的标号 ±（即考虑到它们在 Γ 上的位置），以前我们曾借助于 KdV 得到了它们关于 x 的微分方程 (5.3) 以及关于 t 的微分方程 (5.25)，同时曾用公式 (4.19) 来表示势．

下面让我们来研究从曲面 Γ 上的点集 $Q_q = (\gamma_q(x), \pm)$ 到参数集 A^j 的变量代换，把这种代换起名为阿贝尔映象，其中

$$A^j(Q(x), P(x_0)) = \sum_q \int_{P_q}^{Q_q} \tilde{\Omega}_j. \qquad (20)$$

式中点 $P_q(x_0)$ 是固定的，用精确到附加任何一个点阵向量来确定参数集 A^j．由于公式 (17)，阿贝尔代换 (20) 将 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 的方程 (5.3) 线性化了，这是因为 $A^j(x) = i(x-x_0)U^j$，而向量 U 是恒定的．

阿贝尔参数 A^i 实际上是"角" $A^i = \varphi_j$. 根据著名的刘维定理，对完全可积的哈密顿系统 (2.3) 可以引用这种"角变量". 同样可以引入正则共轭变量"作用".

阿贝尔代换 (20) 是可逆的. 因此点 $Q_j = (\gamma_j, \pm)$ 反过来也可以用参数 A^i 来表示，从而势 $u = -2\sum\gamma_j + \sum E_\alpha$ 将是参数 A^i 的函数. 这是"阿贝尔积分的逆"问题. 大家知道，这种类型的逆问题是通过同点阵 (7.31)（这种点阵是由复的 n 维空间中的 $2n$ 个向量所组成的）相联系的多元 θ 函数来求解的. 稍后不久 (§ 9) 将给出用 § 7 中定义的黎曼 θ 函数来表示势 $u(x)$ 的简便公式.

当用代换 (18) 将点 $Q_j = (\gamma_j, \pm)$ 的集合变换到参数 A^i 的集合时，则把有限带势 $u(x)$ 借助于 KdV(以及借助于所有高阶 KdV 方程)的时间动力学作了线性化. 为了验征这一事实，应注意如下：当 $E \to \infty$ 时，布洛赫本征函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 有渐近式 $\exp\{\pm i(x - x_0)\sqrt{E}\}$. 如果势的变化即 $u \to u(x, t)$ 是借助于 KdV，那么当 $E \to \infty$ 时函数 ψ 的渐近式将有下面形式：

$$\psi_\pm(x, x_0, t) \sim \exp\{\pm i(x - x_0)k \pm ik^3 t\}, \qquad (20')$$

式中 $k = \sqrt{E}$.

渐近式 (20′) 从下面的 Lax 表象得到：

$$\partial L/\partial t = [L, A], \qquad (21)$$

在 § 4 中曾指出 KdV 的这种表象，其中三阶算子 A 的形式为 (1.2.5). 当 $E \to \infty$ 时，势 u 变得不重要. 于是令 $u = 0$，当 $E \to \infty$ 时，我们便从 (21) 直接得到 (20′). 对高阶 KdV 也完全类似，但算子 $A = A_q + c_1 A_{q-1} + \cdots + c_q A_0$ 的阶数为 $2q + 1$. 下面所作地讨论同上面一样，当 $E \to \infty$ 时，我们从 (21) 得到 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 的渐近形式：

$$\psi_\pm(x, x_0, E) \sim \exp\{i[i(x - x_0)k + (k^{2q+1}$$

$$+ c_1 k^{2q-1} + \cdots + c^q k)t]\} \qquad (22)$$

同前面一样，从渐近式 (22) 我们得到

$$A(Q_1, \cdots, Q_n, P_1, \cdots, P_n) \cong i(x - x_0)U + Vt, \quad (23)$$

式中符号$\cong$表示等式精确到点阵向量 (7.31). 对向量 $V = V_q + c_1 V_{q-1} + \cdots + c_q V_0$ 我们有公式 ($V_0 = U$):

$$V_k^j = \oint_{b_j} \omega_k, \ k = 0, \cdots, q, \ q < n. \quad (24)$$

II 类微分 ω_q (参看(8))的 a 周期等于零: $\oint_{a_j} \omega_q = 0$, 并且在 Γ 上的∞点处有唯一的极点，在此点处其罗兰展开为

$$\omega_q \sim dz \left(\frac{1}{z^{2q+2}} + \varphi(z) \right),$$

式中 $z = 1/\sqrt{E}$, 当 $z = 0$ 时, $\varphi(z)$ 是解析的. 点 $Q_j = (\gamma_j, \pm)$ 已经是 x 和 t 的函数. 完全同对 x 的关系一样，从渐近式(22)得到公式(24). 参数 A^i 对于 x 和 t 的导数公式(23),(24)可以直接得到而不必利用本征函数 $\psi_\pm$ 在 $E \to \infty$ 时的渐近式来求. 为此，在关于 x 和 t 的方程(5.3)和(5.25)中，应算出对 A^i 的变量代换 (18), 从而证明代换 (18) 使这两个方程线性化. 这里我们将不进行这种计算. 在参数 A^i 中，向量 V_1 对应于借助 KdV 的动力学，其中 $c_1 = 1$, $c_0 = 0$, $c_j = 0$, $j > 1$.

对光滑实的 $u(x, t)$ 来说，由于参数 A^i 实际上成为 n 维实的环面中的角坐标，于是，从公式(23)得到，解 $u(x, t)$关于 t 的动力学是准周期性的. 在公式 (23) 中，这些实参数 A^i 的角特性从下面事实得到: 这些实参数以精确到可加上任意一个 n 维点阵向量来确定，而这种点阵在实的 n 维空间中是由向量 $e'_1, \cdots, e'_n$ 生成的(参看 (7.31)).

下面让我们注意到解 $u(x, t)$ 及一般有限带势 $u(x)$ 的非

常奇妙的解析性质．如果 x 和 t 取作复的，那么所有这些解关于虚轴同样是准周期的．这种性质同样从公式（23）得到，因为在复的 n 维空间中，我们所碰到的点阵实际上是由 $2n$ 个向量所组成的．这种性质乃是复区域 C 中的维尔斯特拉斯椭圆函数的双周期性向所有 n 带势的自然推广．维尔斯特拉斯椭圆函数是单带势并且是 KdV 的极浅水波．

现在着手研究准动量 $p(E)$，在 §1 中它是用下面等式来定义的：

$$\hat{T}\psi_{\pm} = e^{\pm ipT}\psi_{\pm} = \psi_{\pm}(x+T),$$

式中 T 是势的周期．正像我们已经知道的那样，准动量 $p(E)$ 的确定精确到附加 π/T 的整数倍．当 $E\to\infty$ 时，准动量按 $z=1/\sqrt{E}$ 的展开式系数正好等于在第一章所引入的 KdV 方程及其所有高阶方程的多项式积分 I_n：

$$p(E) \sim k + \sum_{n\geqslant -1} \frac{\pm 2I_n}{(2k)^{2n+3}}, \tag{25}$$

而高阶 KdV 方程本身有下面形式：

$$\dot{u} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta I_n}{\delta u(x)}.$$

对于 $p(E)$ 我们曾有下面公式：

$$p(E) = \frac{1}{T}\int_0^T \chi_{\pm}(x,E)dx = \frac{1}{T}\int_0^T \chi_R dx$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\sqrt{R(E)}dx}{\prod_k (E-\gamma_k(x))}.$$

现在我们利用形如下面的微分：$W = d_E \ln\psi_{\pm}$．借助于（10）我们有

$$W = i(x-x_0)\omega_0 + \sum_{j=1}^{n} \Omega^{p_j(x_0)Q_j(x)} + \sum k_j\bar{\Omega}_j, \tag{26}$$

式中 $P_j=(\gamma_j^0,\pm)$，$Q_j=(\gamma_j(x),\pm)$. 如果所有 $Q_j(x)$ 都是关于 x 的周期性函数,其周期为 T（而对关于 x 的周期性势 $u(x)$ 来说，其周期也等于 T)，那么平移算子 $\hat{T}:x\to x+T$ 按以下方式作用于 W：

$$\hat{T}:W\to W+iT\omega_0+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\tilde{Q}_j, \tag{27}$$

式中 λ_j 是整数. x 从 x_0 连续地变到 x_0+T 并考虑到上面所建立的数 k_j 的整数性,对 $\lambda_j=0$ 的情形我们得到

$$\hat{T}:W\to W+iT\omega_0. \tag{28}$$

因 $\psi_\pm=\exp\{\int W\}$，于是可以写成

$$d_E p(E)=\frac{\partial p}{\partial E}dE=\omega_0. \tag{29}$$

现在我们可以作出以下结论： 准动量 p 乃是 II 类微分 ω_0 在曲面 Γ 上的路径积分,这类微分是用条件 (6)，(7) 来归一化的. 参数 A^j 关于 x 的导数由 b 周期

$$U^j=\oint_{b_j}\omega_0$$

的集合来确定(参看 (23)). 对 $p(E)$ 来说,我们从公式 (29) 看到,准动量 $p(E)$ 在 n 带势的情形中,表示为形如

$$p_n(E)dE/\sqrt{R(E)}$$

这种表达式的积分. 这一事实以前曾按别的途径从公式 (4.4) 得到. 我们看到，$p_n(E)$ 是用归一化条件(即 a 周期等于零)所确定的且最高项系数为 1 的 n 次多项式. 因这种微分的 b 周期不等于零，所以为了确定函数 $p(E)$ 的单值分枝，则应在 E 平面上沿着全部有限长和无限长的禁带（它们恰好有 $n+1$ 个)作截口,其中这些禁带为

$$(-\infty,E_0),(E_1,E_2),\cdots,(E_{2n-1},E_{2n}).$$

在这种具有截口的平面上,曲面 Γ 分成两块. 因此,将要确定

的函数 $p(E)$ 在每一块上已经单值化了；这是因为绕这些截口的迴路是闭链 a_j，而对 $d_E p = W_0$ 来说，它的 a 周期等于零. 可以选“物理叶”，函数 $p(E)$ 的值在物理叶上位于上半平面 $\mathrm{Im} p \geqslant 0$. 这里我们将不仔细研究映象 $p(E)$ 及其逆映象 $E(p)$ 的解析性质.

§9. 有限带势与 KdV 解的精确公式

同上述一样，设 $u(x)$ 是薛定谔算子 $L = -d^2/dx^2 + u(x)$ 的 n 带势；谱 E_0, E_1, $\cdots$, 确定一个超椭圆黎曼曲面 $\Gamma(y^2 + R(E) = 0)$；$(\gamma_j, \pm)$ 是布洛赫本征函数 $\psi_\pm(x, x_0, E)$ 在 Γ 上的零点和极点. 对于势我们有表达式 (4.19)：

$$u(x) = -2 \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(x) + \sum_{\alpha=0}^{2n} E_\alpha.$$

同样曾得到关系式 (8.16)：

$$i(x - x_0) U_q \cong \sum_{j=1}^{n} \int_{(\gamma_j(x_0), \pm)}^{(\gamma_j(x), \pm)} \tilde{\Omega}_q.$$

对 $n = 2$ 的情形，参数 γ_1、γ_2 关于 x 的动力学方程 (5.3) 正好同在重陀螺理论中柯瓦列夫斯基情形的方程（关于时间）一样(这种方程的变量是由她在研究重陀螺理论中找到的)(参看著作[22]). 在亏格为 n 的曲面 Γ 上，公式(4.19)中的势 $u(x)$ 是通过 n 个点集 $(\gamma_1, \pm)$, $\cdots$, $(\gamma_n, \pm)$ 所构成的最简单的对称函数 $\sum \gamma_i$ 来表示的. 而由曲面 Γ 的 n 个点的集合所构成的全部形如 $\sum \gamma_{i_1} \cdot \cdots \cdot \gamma_{i_k}$ 的对称函数，则借助于阿贝尔代换 (8.20) 确定成 n 个复变量的且相对点阵 (7.31) 为 $2n$ 周期的亚纯函数. 在关于 θ 函数的标准文献中 (参看 Kratzer A. Lehrbuch der Thetafunktionen. *Lcipziq: Teubner,* 1903)，给出这种对称函数通过 θ 函数的表达式，在 [22] 中利用到这种表达式. 由此得到势 $u(x)$ 的公式，不过，对于最初的对称多项

式来说，公式的形式可作重大改进．结果发现可以通过黎曼 θ 函数得到简单的表达式：

$$u(x)=-2\frac{d^2}{dx^2}\ln\theta((x-x_0)U+K)+C(\Gamma), \qquad (1)$$

式中的常数 $C(\Gamma)$ 和 K_q 的值下面将给出．

下面让我们写出黎曼 θ 函数的基本解析性质，在推导公式 (1) 时，要用到这些性质．我们来研究一个复变量的多值函数：

$$\theta\left(\cdots,\int_{\infty}^{P}\tilde{\Omega}_i+(x-x_0)U_i+g_i,\cdots\right)=f(E), \qquad (2)$$

式中

$$P=(E,\pm),\ g_j=-\sum_{q=1}^{n}\int_{\infty}^{\gamma_q(0)}\tilde{\Omega}_j+\pi_{ij}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}B_{jq}.$$

函数 $f(E)$ 在区域 σ 中是单值的，其中 σ 是用所有闭链 a_i，b_i 来剖分曲面 Γ 所得到的区域（图 14）． 这时函数 $f(E)$ 在 σ 上恰好有 n 个零点；这些零点原来恰好等于给出阿贝尔积分之逆的雅可比问题的解的点集 $[\gamma_1(x),\ \cdots,\ \gamma_n(x)]$（参看 [21]）．对雅可比问题的解，在 [21] 中给出一种算法，这种算法要求对表达式 $E\dot{d}\ln f(E)$ 沿 σ 的边界作积分．从中得到代数方程组，其中

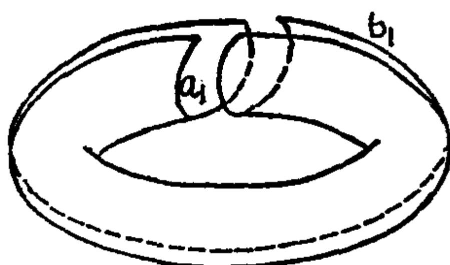


图 14．将环面（亏格 $g=1$）沿闭链 a_1，b_1 切开，使环面变成方形．

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j(x)=\sum_{q}\oint_{a_q}E\tilde{\Omega}_q-\operatorname*{res}_{E=\infty}\{Ed\ln f(E)\}. \qquad (3)$$

把 (3) 同 (4.19) 比较，我们得到势的公式：

$$u(x) = 2 \operatorname*{res}_{E=\infty} \{E d \ln f(E)\} + C(\Gamma), \tag{4}$$

式中

$$C(\Gamma) = \sum_{\alpha=0}^{2n} E_\alpha - 2 \sum_{q=1}^{n} \oint_{a_q} E \tilde{\Omega}_q.$$

为了推出基本公式 (1)，必须算出在点 $E=\infty$ 处的留数，在曲面 Γ 上点 $E=\infty$ 处的局部坐标为 $z = 1/\sqrt{E}$. 按定义，我们有

$$E d \ln f(E) = \sum_k - 2z^{-5} \frac{\partial \ln \theta}{\partial \eta_k} \frac{\partial \eta_k}{\partial E} dz$$

$$= -2z^{-5} \sum_k \tilde{\Omega}_k \frac{\partial \ln \theta}{\partial \eta_k} dz, \tag{5}$$

式中 $\eta_k = \int_\infty^P \tilde{\Omega}_k$, $P = (E, \pm)$. 和在 § 7 中指出的一样，设

$$\tilde{\Omega}_k = (c_k^1 E^{n-1} + \cdots + c_k^n) dE \prod_{\alpha=0}^{2n} (E - E_\alpha)^{-\frac{1}{2}}.$$

当 $E \to \infty$ 时我们有

$$\frac{c_k^1 E^{n-1} + \cdots + c_k^n}{\sqrt{\prod_\alpha (E - E_\alpha)}} \sim c_k^1 E^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{d_0}{2} E^{-1} - \frac{d_1}{2} E^{-2}\right)$$

$$+ c_k^2 E^{-\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{d_0}{2} E^{-1} - \cdots\right). \tag{6}$$

对 $E d \ln f$ 由此得到

$$E \frac{d \ln f}{dz} dz = -2dz \sum_k \left(\frac{c_k^1}{z^2} + \cdots\right) \frac{\partial \ln \theta}{\partial \eta_k}, \tag{7}$$

式中 $\eta_k = \int_\infty^P \tilde{\Omega}_k + (x - x_0) U_k + g_k$, $P = (E, \pm)$. 因在 σ 上函数 $\partial \ln \theta / \partial \eta_k$ 在点 $z = 0$ (或 $E = \infty$) 处是正则的，因此我们求得

$$\operatorname*{res}_{E=\infty}(Ed\ln f(E)) = \left(-2\sum \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \ln\theta}{\partial \eta_k}c_k^1\right)_{z=0}$$

$$= 4\sum_{i,j} c_i' c_j' \frac{\partial^2}{\partial\eta_i\partial\eta_j}\ln\theta. \qquad (8)$$

在点 $z=0$ $(E=\infty)$ 的邻域内，我们有

$$\omega \sim \frac{dz}{z^2},\ \tilde{\Omega}_k \sim -2c_k' dz. \qquad (9)$$

其次，把恒等式(参看[24])

$$U_k = -2\pi i c_k^1 \qquad (10)$$

同公式 (8) 比较，最后我们得到

$$u(x) = -2\frac{d^2}{dx^2}\ln\theta(\eta_1, \cdots, \eta_n) + C(\Gamma),$$

$$C(\Gamma) = \sum_\alpha E_\alpha - 2\sum_{q=1}^n \oint_{a_q} E\tilde{\Omega}_q, \qquad (11)$$

式中

$$\eta_k = \int_\infty^P \tilde{\Omega}_k + (x-x_0)U_k + g_k. \qquad (12)$$

把公式 (11) 同 §8 的结果比较，最后我们得到 KdV 有限带解的普遍公式：

$$u(x,t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta((x-x_0)U + Vt + K) + C(\Gamma). \qquad (13)$$

§10. KdV 的若干个特解

1. 多孤子解. 在构造 KdV 方程的诸有限带解 $u(x,t)$ 中间，其中有一个极限情况，这就是当 $|x|\to\infty$ 时存在著名的(参看第一章 §3) 衰减快的多孤子解. 但问题在于，这种薛定谔方程的无反射势可以作为周期为 T 的周期性(和准周期性)势 $u_T(x)$ 在 $T\to\infty$ 的极限情形下得到，在这种极限情形下带

的数目并不改变．当 $T \to \infty$ 时，诸有限大小的准许带凝聚成一些分立谱的孤立点，而无限大准许带的边缘收缩成零．

上述事实用黎曼曲面 Γ 的语言来讲，这相当于出现以下情形（曲面 Γ_T 的形式为 $y^2 = \prod\limits_{\alpha} (E - E_\alpha(T))$：当 $T \to \infty$ 时，$[E_0(T), E_1(T)]$，$[E_2(T), E_3(T)]$，$\cdots$，$[E_{2n-2}(T), E_{2n-1}(T)]$ 等诸支点对儿相互接近，而 $E_{2n}(T) \to 0$．除此之外，当 $T \to \infty$ 时，黎曼曲面退化为有理的 $\{y^2 = E\} = \Gamma_\infty$，并且这些对儿的极限位置正是

$$E_{2i}(\infty) = E_{2i+1}(\infty) = -\kappa_i^2.$$

因此黎曼曲面方程本身具有下面形式：

$$y^2 = E \prod_{i=0}^{n} (E + \kappa_i^2)^2.$$

而对零点集合 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ 来说，方程 (5.3) 和 (5.25) 这时具有下面形式：

$$\begin{aligned} \gamma_j' &= \frac{2i}{\prod\limits_{k \neq j} (\gamma_j - \gamma_k)} \prod_{q=1}^{n} (\gamma_j - i\kappa_q) \sqrt{\gamma_j}, \\ \dot{\gamma}_j &= \frac{8i\left(\sum\limits_{q \neq j} \gamma_q - \frac{1}{2} \sum\limits_{i} E_i\right)}{\prod\limits_{k \neq j} (\gamma_j - \gamma_k)} \prod_{q=1}^{n} (\gamma_j - i\kappa_\beta) \sqrt{\gamma_j}. \end{aligned} \tag{1}$$

求解这些方程是容易的，从而得到多孤子解的公式（第一章 § 3）．同时在公式 (9.13) 中，可通过黎曼 θ 函数直接弄清 $T \to \infty$ 时的退化情形：即当 $T \to \infty$ 时，我们从公式 (9.13) 恰好得到通过行列式 Δ 的二阶对数导数来表示多孤子解的公式 (1.3.5)

采用高阶 KdV 定态问题 (2.3) 的语言，也可以这样讲：这些解乃是极度退化的可分离类型．

当然，寻求多孤子解可不必用种种本末倒置的反推(a $posteriori$)方法来说明,因为这些解是指数函数的有理表示(可用这种形式来找孤子解).

2. 以有限带势为背景的孤子. 可能有这样的情形：当$T\to\infty$时，黎曼曲面Γ_T仅仅部分地退化,即部分的支点对，如$[E_{2i}(T), E_{2i+1}(T)]$(其中$i=i_0, \cdots, i_k, k<n-1$)在$T\to\infty$时才聚集成孤立点$-\kappa_i^2$. 相应的诸势$u_T(x)$当$T\to\infty$时退化为势$u_\infty(x)$，而这种势即$u_\infty(x)$在$x\to\pm\infty$的情形下存在有限带的渐近形式. 这恰恰表明，存在带数为$q=n-k$的两个有限带势$u_+(x)$和$u_-(x)$，使得

$$u_\infty(x)-u_+(x)\to 0\quad(x\to+\infty),$$
$$u_\infty(x)-u_-(x)\to 0\quad(x\to-\infty).$$

这两个有限带势$u_\pm(x)$有共同的谱，这种谱为下面形式的黎曼曲面Γ：

$$y^2=\prod_{\substack{\alpha\neq 2i_s,\\ 2i_s+1}}(E-E_\alpha).\tag{2}$$

不过这两个势$u_\pm(x)$是有差别的. 如果$P_1^{(+)}, \cdots, P_{n-k}^{(+)}$是势$u_+(x)$的布洛赫函数的零点集合，其中$P_j^{(+)}=(\tilde{\gamma}_j(x), +)$，那么势$u_-(x)$的零点集$P_1^{(-)}, \cdots, P_{n-k}^{(-)}$将为下面形式：$P_j^{(-)}=(\tilde{\gamma}_j, -)$. 仅在势为偶函数情形，即$u_+(x)=u_+(-x)$我们才有$u_+=u_-$. 对这种情形，充要条件是使对所有$j=1, \cdots, n-K$来说，$\tilde{\gamma}_j$处于支页的端点处.

诸如$u_\infty(x)$这类势生成 KdV 方程的解$u(x, t)$，把这类解叫做“以有限带为背景的多孤子解”；而这些$u_\infty(x)$势本身叫做“以有限带为背景的无反射势”. 这些无反射势成为高阶 KdV 定态问题的可分离解.

方程(5.3)，(5.25)具有下面形式：

$$\gamma'_q = \frac{2i}{\prod\limits_{k\neq q}(\gamma_q-\gamma_k)}\left(\prod_{\substack{\alpha\neq 2i_s,\\ 2i_{s+1}}}(\gamma_q-E_\alpha)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \prod_{\alpha=2i_s}(\gamma_q-E_\alpha),$$

$$\dot{\gamma}_q = \frac{8i\left(\sum\limits_{q=k}\gamma_k-\frac{1}{2}\sum E_i\right)}{\prod\limits_{q\neq k}(\gamma_q-\gamma_k)}\left(\prod_{\substack{\alpha\neq 2i_s,\\ 2i_{s+1}}}(\gamma_q-E_\alpha)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times \prod_{\alpha=2i_s}(\gamma_q-E_\alpha). \tag{3}$$

对 $n-k=1$ 的单带情形，椭圆公式参看 Кузнецов Е. А., Михайлов А. В. *Тэтф*, 1974, т. 67, *вып*. 11.

3. 椭圆函数解. 除了上面 1，2 点所指出的简并型解之外，还存在一些 KdV 方程的非简并解以及用椭圆函数来表示的有限带势. 让我们回忆一下，简单(极浅水)波型 $u(x-ct)$ 的最简单解具有维尔斯特拉斯椭圆函数的形式:

$$u(x-ct)=2\wp(x-ct)-c/6,$$

$$x-x_0=\int\frac{du}{(4u^3-g_2u-g_3)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4}$$

大家知道，复变量 x 的函数 $\wp(x)$ 是实周期为 T 和虚周期为 T' 的双周期性函数，其中

$$T=b/U_1,\quad T'=2\pi i/U_1. \tag{5}$$

而具有黎曼曲面为 $\Gamma(y^2=\prod\limits_{\alpha}(E-E_\alpha))$、相应黎曼矩阵为

$$(2\pi i\delta_{kq},\ b_{kq})$$

的一般有限带势 $u(x)$，则具有实周期集合

$$T_q^{-1}=\sum_j b^{jq}U_j,\quad b^{jq}b_{qs}=\delta_s^j \tag{6}$$

及虚周期集合

$$T'_q=2\pi i/U_q. \tag{6'}$$

因此，这种形式的势 $u(x)$ 为复变量 x 的准周期性函数．对于势在实轴 x 上为周期性情形来说，充分而且必要条件得满足 $n-1$ 个整数关系：

$$\sum_{q=1}^{n} m_{qk} T_q = 0, \quad k = 1, \cdots, n-1. \tag{7}$$

不过从关系式(7)还得不到有关虚周期 T'_q 的任何关系式．所以势$u(x)$将是复变量 x 的准周期性函数．为了使势是双周期性的，从而用椭圆函数来表示，则充分且必要条件还得使虚周期满足 $n-1$ 个关系式：

$$\sum_{q=1}^{n} m'_{qk} T'_q = 0, \quad k = 1, \cdots, n-1. \tag{8}$$

所有 n 带势的总和构成 $3n+1$ 维族（$2n+1$ 个支点或带的边缘再加上已知谱的 n 个参数）． 考虑到平凡的变换 $u \to u + \text{const}$ 及对实周期和虚周期的 $2n-2$ 个关系式（7）和（8），我们看到，椭圆函数势应以精确到附加常数范围内来构造不高于（$n+2$）维族．

周期群的关系式(7)和(8)仅由曲面 Γ 来确定． 所以从任何一个 n 带椭圆势出发，当这种势随时间运动借助于任何一个高阶 KdV 时，将重新得到椭圆势．我们知道以下的 n 带椭圆 Lamé-Ince 势：

$$u_n(x) = \frac{n(n+1)}{2} u_1(x) = n(n+1)\wp(x). \tag{9}$$

这族势的谱依赖于两种参数(除附加常数外)． 这样一来，在解各种各样的高阶 KdV 的柯西问题时，我们便从 Lamé-Ince 势中得到（$n+2$）维族的 n 带椭圆势．我们不知道是否存在椭圆势的其它族．

现在研究 $n=2$ 的情形．势 $u(x) = 6\wp(x)$ 的谱有下面形式：

$$E_0 = 3e_1,\ E_1 = -(3g_2)^{\frac{1}{2}},\ E_2 = 3e_2,$$
$$E_3 = (3g_2)^{\frac{1}{2}},\ E_4 = 3e_3,\ 4e_i^3 - g_2e_i - g_3 = 0,$$
$$i = 1, 2, 3. \tag{10}$$

让我们来解带有初始条件为 $u(x, 0) = 6\wp(x)$ 的 KdV 方程的柯西问题. 所有这族椭圆函数势将有下面形式(参看[6]):

$$u(x - x_0, t) + \text{const}, \tag{11}$$

式中 $u(x, 0) = 6\wp(x)$.

我们事先就知道，作为以前所得结果的推论，KdV 的解将是椭圆函数. 利用这一事实和初始条件，经过基本计算得到

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{3} 2\wp(x - \alpha_i(t)), \tag{12}$$

式中

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 0,\ \tau = \int_0^{\alpha_1 - \alpha_3} \frac{dz}{12(g_2 - 3\wp^2(z))^{\frac{1}{2}}},$$
$$\alpha_2 - \alpha_3 = \frac{1}{2}\wp^{-1}\{-\wp(\alpha_1 - \alpha_3) \tag{13}$$
$$+ [g_2 - 3\wp^2(\alpha_1 - \alpha_3)]^{\frac{1}{2}}\}.$$

这里所找到的 KdV 方程的精确解乃是这样的三个简单波之和,即这三个波在运动中不改变波形,但它们有很复杂的关联位相 (скоррелированные фазы) $\alpha_i(t)$. 显然，从解析观点来看,这是 KdV 的最简单的非简并双带解.

第三章　进一步发展构造可积系统及其解的方法

在第一章所阐明的经典逆问题方法使我们能解 $x\to\pm\infty$ 时系数衰减快的方程，这是因为在求解这类方程时，我们实质上只利用了构造散射理论所必须的实轴上的渐近区域．本章我们将重新建立一种逆问题方法，它使我们能构造可积方程的某些定域解，也即在每一点 (x, t) 的邻域内的解．这种重新建立的逆问题方法非常有用，它还能拟定一条普遍的路子，以便构造即可能可积又能找到精确解的方程系统．

§1. 正则黎曼问题

一个经典的复变函数理论问题，即熟知的黎曼问题，在这种重新定义的方法中起着核心的作用．用下面方法来定义黎曼问题．假设在复变量 λ 的平面上给定一个闭合迴路 Γ，它可能通过无穷远点，同时还假设在此迴路上给定一个矩阵（N 阶）函数 $G(\lambda)$．要求构造一个在迴路 Γ 内部为解析的矩阵函数 $\psi_1(\lambda)$ 和一个在此迴路外部为解析的矩阵函数 $\psi_2(\lambda)$，并且要求 ψ_1 和 ψ_2 在此迴路上满足下面条件:

$$\psi_1(\lambda)\psi_2(\lambda) = G(\lambda). \tag{1}$$

显然，黎曼问题的这种解并不是唯一的．例如，如果 ψ_1，ψ_2 是某一这种类型的解，而 g 是任意与 λ 无关的非退化矩阵函数，那么 $\psi_1 g$，$g^{-1}\psi_2$ 这一对矩阵函数仍然是具有同样函数 $G(\lambda)$ 的黎曼问题的解．

为了消除这种非单值性，则必须对黎曼问题进行归一化，

为此事先得对函数 ϕ_1 或者 ϕ_2 在其解析区域的某一点上给定一个值．因此这种点和函数的不同选择便对应黎曼问题的不同归一化．在大多数情形中，我们将考虑在无穷远点归一成单位矩阵的归一化．我们把这种归一化称作标准归一（canonical）．

下面让我们假定函数 ϕ_1 和 ϕ_2 在它们各自的解析区域处处不退化，也即 $\det\phi_1 \neq 0$，$\det\phi_2 \neq 0$．对这种情形的黎曼问题称之为正则的（regular）．具有已知归一化的正则黎曼问题的解是唯一的．实际上，假设 $\phi_1^{(1)}$，$\phi_2^{(1)}$ 和 $\phi_1^{(2)}$，$\phi_2^{(2)}$ 是正则黎曼问题的两个解．于是，在迴路上我们有

$$\phi_1^{(1)}\phi_2^{(1)} = \phi_1^{(2)}\phi_2^{(2)}.$$

让我们来研究函数 $\chi(\lambda) = [\phi_1^{(2)}(\lambda)]^{-1}\phi_1^{(1)}(\lambda) = \phi_2^{(2)}(\lambda)[\phi_2^{(1)}(\lambda)]^{-1}$．把这种函数从迴路 Γ 解析延拓到整个复平面，而根据刘维定理它等于常数．在固定好归一化之后，就意味着 $\chi \equiv 1$．

正则黎曼问题的解归结为在迴路 Γ 上所确定的奇异积分方程组的解．例如，假设在迴路 Γ 之外的某一点 λ_0 处将黎曼问题归一化，并设

$$\phi_2(\lambda_0) = g.$$

我们将寻求具有下面形式的黎曼问题的解：

$$\phi_1^{-1}(\lambda) = h + \int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi \text{ 在迴路内部} \tag{2}$$

及

$$\phi_2(\lambda) = h + \int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi \text{ 在迴路外部}.$$

于是，从归一化条件我们有

$$h = g - \int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda_0} d\xi. \tag{3}$$

在迴路上，根据 Сохоцкий-Племель 公式，我们有

$$\phi_1^{-1} = h + \int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi - \lambda} + \pi i \varphi(\lambda),$$

$$\lambda \in \Gamma. \qquad (4)$$

$$\phi_2 = h + \int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi - \lambda} - \pi i \varphi(\lambda),$$

将(3)和(4)代入到(1)，我们得到 φ 的奇异积分方程 ($\lambda \in \Gamma$):

$$g - \int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda_0} d\xi + \pi i \varphi(\lambda) T(\lambda) + \int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi - \lambda} = 0, \quad (5)$$

式中 $T = (G-1)^{-1}(G+1)$，此方程的解便给出正则黎曼问题的解．对于最简单的情形，也即当迴路取为实轴且归一化为标准归一化 ($h = g = 1$) 时，方程 (5) 便具有下面形式：

$$\frac{1}{\pi i}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi + 1\right] + \varphi(\lambda) T(\lambda) = 0. \qquad (6)$$

如果 $N = 1$ 且 ϕ_1 和 ϕ_2 为数值函数(标量情形)，那么正则黎曼问题允许有显示解．对关系式(1)取对数，我们有

$$\ln \phi_2 - \ln \phi_1^{-1} = \ln G. \qquad (7)$$

因为根据正则性的假定，函数 ϕ_1 和 ϕ_2 在解析区域没有零点，所以它们的对数也是允许表示成柯西积分形式的解析函数．

如果作下面假定，便满足方程(7)：

$$\ln \phi_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi, \quad \mathrm{Im}\lambda < 0,$$

$$(8)$$

$$\ln \phi_1^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi, \quad \mathrm{Im}\lambda > 0.$$

由此可见，

$$\phi_2 = \exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi\right],$$

$$(9)$$

$$\phi_1 = \exp\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi\right].$$

公式(9)给出正则黎曼问题的可解性条件的一个表示．显然，可解性的充分条件乃是(8)式中积分的收敛性，其中包括函数 $G(\lambda)$ 没有极点和零点(黎曼问题的零指数 (index))．在矩阵情形中，黎曼问题可解性条件比较复杂，仅要求矩阵函数 $G(\lambda)$ 有界和非退化看来是不够的．例如，正象在[25]中曾指出的那样，要求 $\mathrm{Re}G > 0$，也即要求在迴路 Γ 上对所有 λ 值，矩阵 $G(\lambda)$ 的实部为正定才是充分的．下面，如果事先不作相反声明，我们将处处假定正则黎曼问题是可解的．正象我们已经知道的那样，在这种情形中，加上归一化条件之后，正则黎曼问题便是单值可解的．

§2. 具有零点的黎曼问题

如果矩阵函数 $\phi(\lambda)$ 在点 $\lambda = \lambda_0$ 处的行列式等于零 $(\det\phi(\lambda_0) = 0)$，那么我们将说它在此处有零点．显然，在此点上逆矩阵函数存在奇点——有限阶的极点．我们将称零点 $\lambda = \lambda_0$ 是简单的，如果这个极点的阶数等于 1 的话，也即如果在点 $\lambda \simeq \lambda_0$ 的邻域内有下面展式:

$$\phi^{-1}(\lambda) = \frac{A}{\lambda-\lambda_0} + C + \cdots \tag{1}$$

而函数 ϕ 本身在 $\lambda = \lambda_0$ 的邻域内有下面展式:

$$\phi(\lambda) = B + D(\lambda-\lambda_0) + \cdots \tag{2}$$

显然，

$$\begin{aligned} &AB = BA = 0,\\ &AD + CB = BC + DA = 1. \end{aligned} \tag{3}$$

在标量数值函数 ϕ 的情形中，显然 $B = 0$，而点 $\lambda = \lambda_0$ 乃是函数 $\phi(\lambda)$ 通常意义的零点．

我们正是从审核这一情况开始来研究具有诸零点的黎曼问题.我们将假定黎曼问题的归一化是标准的.设函数 ϕ_1 在迴路 Γ 内部是解析的,且在 Γ 内有 n 个简单零点 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$,而函数 ϕ_2 在迴路外部是解析的,且在迴路外也有 n 个简单零点 $\mu_1, \cdots, \mu_n$, 并且还设任何一个零点 λ_i, μ_i 皆不在迴路 Γ 上.

下面让我们研究辅助函数

$$\tilde{\phi}_1 = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda - \mu_i}{\lambda - \lambda_i} \phi_1, \tag{4}$$

$$\tilde{\phi}_2 = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda - \lambda_i}{\lambda - \mu_i} \phi_2, \tag{5}$$

这两个函数同样是解析的,不过它们业已不存在零点. 显然,$\tilde{\phi}_2(\infty) = \phi_2(\infty) = 1$ 并且在迴路 Γ (这里两个函数 $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_2$ 也有定义)上,有 $\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2 = \phi_1\phi_2 = G$. 由此可见, 关于确定函数 $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_2$ 的问题是正则黎曼问题, 因而它们由公式 (1.9) 给出. 这个例子表明,当存有零点时, 黎曼问题的唯一性被破坏,这是因为除需给出函数 G、迴路 Γ 和归一化外,还必须给出零点的分布. 让我们注意到, 只要在迴路内外零点数目相同, 那么具有零点且在无穷远处具有单位归一化的黎曼问题是可解的.

同正则黎曼问题不同,带有零点的黎曼问题,即使函数 G 在迴路上恒等于 1, 也是有意义的.对于这种情形, $\phi_2 = 1/\phi_1$, 函数 ϕ_2 的零点是函数 ϕ_1 的极点, 从而求解黎曼问题便归结为按它的零点和极点来构造亚纯解析函数的问题. 在一般情形中,可把求解黎曼问题划分成两部分,构造具有给定奇点的有理解析函数和求解正则黎曼问题.

现在让我们着手研究矩阵情形. 对矩阵情形, 非平凡的业已是按零点和极点来构造有理函数的问题. 下面我们先从

函数具有一个零点和一个极点的这一最简单情形开始.

假设令函数 ϕ_1 和 ϕ_2 有下面这样一些条件：$\phi_1\phi_2=1$，$\phi_1(\infty)=\phi_2(\infty)=1$，其中函数 ϕ_1 在点 $\lambda=\lambda_0$ 处有唯一零点，而函数 ϕ_2 在点 $\lambda=\mu_0$ 处有唯一零点. 要求找到函数 ϕ_1、ϕ_2 的一般形式.

让我们注意到，ϕ_1 的零点同 ϕ_2 的极点相同，而 ϕ_2 的零点同 ϕ_1 的极点相同. 所以函数 ϕ_1 和 ϕ_2 各自总共存在一个极点，从而它们的最简分式展开式有下面形式：

$$\phi_1=1+\frac{A_1}{\lambda-\mu_0},\qquad \phi_2=1+\frac{A_2}{\lambda-\lambda_0}. \tag{6}$$

从 $\phi_1\phi_2=1$ 得到

$$\left(1+\frac{A_1}{\lambda-\mu_0}\right)\left(1+\frac{A_2}{\lambda-\lambda_0}\right)=1.$$

我们把此乘积分解成简单分式得到

$$A_1-\frac{A_1A_2}{\lambda_0-\mu_0}=0,\qquad A_2+\frac{A_1A_2}{\lambda_0-\mu_0}=0.$$

由此得到 $A_2=-A_1$ 以及

$$A_1=-(\lambda_0-\mu_0)P,\quad A_2=(\lambda_0-\mu_0)P,$$

式中 $P^2=P$.

可以把矩阵 A_1、A_2 看成是复 N 维空间 C^N 的线性算子矩阵. 显然，P 是某一投影算子的矩阵. 这个投影算子可具有一定程度的任意性，以致凭借它的这种任意性，借助矩阵函数 ϕ_1 和 ϕ_2 的零点位置来反求出它们. ϕ_1 和 ϕ_2 的显式表达式有下面形式：

$$\phi_1=1-\frac{\lambda_0-\mu_0}{\lambda-\mu_0}P,\qquad \phi_2=1+\frac{\lambda_0-\mu_0}{\lambda-\lambda_0}P. \tag{7}$$

这时

$$\phi_1(\lambda_0)=\phi_2(\mu_0)=1-P=B_1.$$

今后为了方便，我们将在 C^N 空间中使用线性代数语言。假设在此空间中给出某一线性算子 U. 我们用 $\ker U$ 表示算子 U 的核. 所谓算子 U 的核是指由 C^N 中这样一些向量组成的集合，这些向量在算子 U 的作用下变成零. 而用 $\mathrm{Im}U$ 来表示算子 U 的象. 所谓算子 U 的象是算子 U 作用于全空间 C^N 的结果. 显然，$\ker U$ 和 $\mathrm{Im}U$ 是 C^N 的线性子空间，而它们的直接和组成整个空间 C^N. 后一事实我们用这样形式来表示：

$$\ker U \oplus \mathrm{Im}U = C^N.$$

下面让我们回到算子 A 和 B. 很容易验证，从(3)得到

$$\ker A = \mathrm{Im}B \text{ 及 } \ker B = \mathrm{Im}A.$$

子空间 $\ker U$ 和 $\mathrm{Im}U$ 仅对退化算子才是非平凡的，而在非退化情形中 $\det U \neq 0$, $\ker U = 0$, $\mathrm{Im}U = C^N$.

一般来说，用子空间 $\ker U$ 和 $\mathrm{Im}U$ 来表征退化算子 U 并不是唯一的. 但投影算子 $P^2 = P$ 例外，因为投影算子相当于单位算子平凡地作用于子空间 $\mathrm{Im}P$ 上. 所以投影算子完全由它自己的象和核来确定. 还要注意到，算子 $1-P$ 也是投影算子，并且

$$\ker(1-P) = \mathrm{Im}P, \qquad \mathrm{Im}(1-P) = \ker P.$$

于是，我们可以按下面子空间来构造公式(7)的投影算子 P:

$$N = \mathrm{Im}\phi_1(\lambda_0), \qquad M = \ker\phi_2(\mu_0)$$

(在本情形中 $\phi_1(\lambda_0) = \phi_2(\mu_0)$).

现在很明显，当每一个函数 ϕ_1, ϕ_2 都有 n 个零点情况时如何来构造这两个函数？让我们给出 n 个投影算子 $P_1, \cdots P_n$ 并让我们来构造乘积

$$\phi_1 = \left(1 - \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda - \mu_1} P_1\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda - \mu_n} P_n\right), \tag{8}$$

$$\phi_2 = \left(1 + \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda - \lambda_n} P_n\right) \cdots \left(1 + \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda - \lambda_1} P_1\right).$$

下面让我们来研究在点 $\lambda = \lambda_k$, $\lambda = \mu_k$ 处的 ϕ_1 和 ϕ_2:

$$\begin{aligned} B_k &= \phi_1(\lambda_k) = U_k(1 - P_k)V_k, \\ \widetilde{B}_k &= \phi_2(\mu_k) = V_k^{-1}(1 - P_k)U_k^{-1}, \end{aligned} \tag{9}$$

式中

$$\begin{aligned} U_k &= \left(1 - \frac{\lambda_1 - \mu_1}{\lambda_k - \mu_1} P_1\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda_{k-1} - \mu_{k-1}}{\lambda_k - \mu_{k-1}} P_{k-1}\right), \\ V_k &= \left(1 - \frac{\lambda_{k+1} - \mu_{k+1}}{\lambda_k - \mu_{k+1}} P_{k+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda_n - \mu_n}{\lambda_k - \mu_n} P_n\right) \end{aligned} \tag{10}$$

均为非退化矩阵.

设 $N_{0k} = \mathrm{Im}(1 - P_k)$, $M_{0k} = \ker(1 - P_k)$. 从(9)得到

$$N_k = \mathrm{Im}\phi_1(\lambda_k) = U_k N_{0k}, \quad M_k = \ker\phi_2(\mu_k) = U_k M_{0k}. \tag{11}$$

显然,子空间 N_{0k} 和 M_{0k} 之交为空集,而它们的直接和组成整个线性空间 C^N. 从(11)得到,这一事实对于子空间 N_k 与 M_k 也成立.

根据给定的 N_k 和 M_k 来构造矩阵 ϕ_1 和 ϕ_2 的问题将对以后起重要作用. 于是,假设在 λ 复平面上给出两组点集 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 和 $\mu_1, \cdots, \mu_n$, 以及给出两组子空间 N_k 和 M_k, 其中 $N_k \oplus M_k = C^N$, 而且 N_k 和 M_k 二者不交. 要求构造这样一对函数 ϕ_1, ϕ_2, 使得 $\phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda) = 1$, $\mathrm{Im}\phi_1 = N_k$ 和 $\ker\phi_2(\mu_k) = M_k$. 下面让我们引进两种方法来解这个问题.

第一种方法是构造投影算子 P_k 的递推方法. 我们假定 $\mathrm{Im}P_1 = \ker(1 - P_1) = N_1$, $\ker P_1 = \mathrm{Im}(1 - P_1) = M_1$. 其次,假设头 $k-1$ 个投影算子已经构造出. 这样我们就知道了非退化矩阵 U_k. 现在确定第 k 个投影算子 P_k 的子空间可从公

式(11)求出：$\ker P_k = M_k U_k^{-1}$，$\operatorname{Im} P_k = N_k U_k^{-1}$. 最后由公式(8)给出 ψ_1 和 ψ_2. 第二种方法是建立在将函数 ψ_1，ψ_2 展成简单分式的基础上. 我们假定

$$\psi_1 = 1 + \sum \frac{A_k}{\lambda - \mu_k} = \psi_2^{-1}. \tag{12}$$

显然从这里有 $\operatorname{Im} A_k = M_k$. 在子空间 M_k 中我们引入基底 $m_k^i (i = 1, \cdots, q_k)$. 于是，算子 A_k 可表示成下面形式：

$$(A_k)_{\alpha\beta} = \sum_i (m_k^i)_\alpha (X_k^i)_\beta,$$

式中 X_k^i 为某些未知向量. 在子空间 N_k 中我们也引入基底；假设这种基底由下面向量组成：

$$n_k^i (i = 1, \cdots, P_k), p_k + q_k = N,$$

我们用向量 $\tilde{n}_k^i (i = 1, \cdots, q_k)$ 将这种基底补足为全空间 C^N 的基底.

下面让我们用任何一种方式在 C^N 中引入标积(例如，为简单起见，将标积定义为 $xy = \sum x_\alpha y_\alpha$) 并要求在这种标积意义上使向量 $\tilde{n}_k^i$ 同向量 n_k^i 正交：

$$n_k^i \tilde{n}_k^j = 0.$$

从条件 $N_k = \operatorname{Im} \psi_1(\lambda_k)$ 我们有

$$[\psi_1(\lambda_k)]_{\alpha\beta} = [B_k]_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{p_k} (n_k^i)_\alpha (Y_k^i)_\beta. \tag{13}$$

由此得到关系式集合

$$\sum_\alpha (\tilde{n}_k^j)_\alpha [\psi_1(\lambda_k)]_{\alpha\beta} = 0, \quad j = 1, \cdots, q_k. \tag{14}$$

将(12)和(13)代入到(14)，我们得到向量 X_k^i 的线性方程组：

$$\tilde{n}_k^j + \sum_q \sum_{i=1}^{q_k} \frac{\tilde{n}_k^j m_q^i}{\lambda_k - \mu_q} X_q^i = 0. \tag{15}$$

从(15)求出 X_q^i，这样我们就完全确定出函数 ϕ_1. 函数 ϕ_2 可用类似方法求出.

下面让我们再回到具有零点的黎曼问题. 我们用下面方式简明陈述此问题. 假设在 λ 复平面上给出迴路 Γ 和两组点集: $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (在迴路内部)以及 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ (在迴路外部). 除此之外，在迴路上定义一个矩阵函数 $G(\lambda)$ 和给出两组子空间 N_k 和 M_k，并且 $N_k \oplus M_k = C^N$. 要求找到在迴路内部为解析的函数 $\phi_1(\lambda)$ 和在迴路外部为解析的函数 ϕ_2，且 $\phi_2(\infty) = 1$，而在迴路上 $\phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda) = G(\lambda)$，此外还要求:

$$\mathrm{Im}\phi_1(\lambda_i) = N_i, \qquad \ker\phi_2(\mu_i) = M_i.$$

为了求解此问题，我们首先用上面曾提出的两种方法之一来构造这样的有理函数 $\phi_0(\lambda)$，使得

$$\mathrm{Im}\phi_0(\lambda) = N_i, \qquad \ker\phi_0^{-1}(\mu_i) = M_i,$$

并将 ϕ_1, ϕ_2 表示为

$$\phi_1 = \phi_0\tilde{\phi}_1, \qquad \phi_2 = \tilde{\phi}_2\phi_0^{-1}.$$

显然 $\tilde{\phi}_1$ 和 $\tilde{\phi}_2$ 分别相应于在迴路内部和外部为解析的且是非奇异矩阵函数. 在迴路 Γ 上

$$\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2 = \tilde{G} = \phi_0^{-1}G\phi_0.$$

关于确定 $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2$ 的问题曾归结为正则矩阵黎曼问题. 也可以直接把具有零点的黎曼问题归结为求解代数和积分方程组. 为此我们把 ϕ_1, ϕ_2^{-1} 表示为下面形式:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 1 + \sum_k \frac{A_k}{\lambda - \mu_k} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\lambda - \xi},\\ \phi_2^{-1} &= 1 - \sum_k \frac{A_k}{\lambda - \mu_k} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\lambda - \xi},\end{aligned} \tag{16}$$

上一个公式中的 λ 在 Γ 内部，而下一个公式中的 λ 在 Γ 的外部.

正如我们知道的那样，$\operatorname{Im}A_k = M_k$，因而，可将 A_k 表示成(13)那样的形式. 对点 $\lambda = \lambda_k$ 作重复以前的讨论，我们得到 X_k^i 的线性代数方程组:

$$\tilde{n}_k^i\left(1 + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi - \lambda_k}\right) + \sum_q \sum_{j=1}^{q_k} \frac{(\tilde{n}_k^i, m_q^j)}{\lambda_k - \mu_q} X_q^j = 0. \quad (17)$$

其次，我们将(16)代入到关系式

$$\phi_1(\lambda) = G\phi_2^{-1}(\lambda),$$

便得到形如下面的积分方程:

$$\frac{1}{\pi i}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)_{\alpha\beta}d\xi}{\xi - \lambda} + 1 + \sum_{k,j} \frac{(m_k^j)_\alpha X_{k\beta}^j}{\lambda - \mu_k}\right] + T_{\alpha\gamma}(\lambda)\varphi_{\beta\gamma}(\lambda) = 0, \quad (18)$$

式中 $T = (1 - G)/(1 + G)$ 是矩阵 G 的 Кэль 变换. 方程(17),(18)组成求解具有零点矩阵黎曼问题的完备方程组.

§ 3. 一阶矩阵系统的逆散射问题

下面我们将指出，怎样能用黎曼问题来求解比第一章所研究的更为普遍情形的逆散射问题. 让我们来研究下面的谱问题:

$$-i\varphi_x = (J\lambda + U)\varphi. \quad (1)$$

式中 J 是给定的常数 N 阶对角矩阵，U 是对角元为零且与 x 有关的矩阵. 让我们来表示这个事实，把矩阵 U 写成下面形式:

$$U = [J, Q], \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U_{ij}(x)|dx < \infty. \quad (3)$$

假设矩阵 J 是实的、非退化的，并且 J 的本征数互不相同. 于是

$$J=\begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$$

（表示成 $J=\operatorname{diag}a_i$）．将数 a_i 按递减顺序排列起来：

$$a_1>a_2>\cdots>a_n.$$

方程(1)的解是由N个元素 φ_i 组成的向量．解的基本矩阵 φ_{ik} 构成解的完备集．其中，φ_{ik} 的第一个指标表示向量分量的指标，而第二个指标表示解的编号，且 $\det\varphi\neq 0$．如果 φ 是解的矩阵，那么 φR（其中 $R=R(\lambda)$，$\det R\neq 0$）同样是解的矩阵．这里 $R(\lambda)$ 为 λ 的任意非退化矩阵函数．今后为了方便，我们把(1)看成矩阵微分方程．除了(1)以外，研究以下同类矩阵方程也是有益的：

$$i\tilde{\varphi}_x=\tilde{\varphi}(J\lambda+U), \tag{4}$$

$$-i\phi_x=(J\lambda+U)\phi-\lambda\phi J, \tag{5}$$

$$i\tilde{\phi}_x=\tilde{\phi}(J\lambda+U)-\lambda J\tilde{\phi}. \tag{6}$$

显然，方程(1)、(4)的任何两个解存在下面关系式：

$$\frac{\partial}{\partial x}\tilde{\varphi}\varphi=0 \qquad (\tilde{\varphi}\varphi=G(\lambda)). \tag{7}$$

特别是，逆矩阵 $\tilde{\varphi}=\varphi^{-1}$ 满足方程(4)．下面矩阵满足方程(5)，(6)：

$$\phi=\varphi e^{-iJ\lambda x}, \qquad \tilde{\phi}=e^{+iJ\lambda x}\tilde{\varphi}. \tag{8}$$

并存在关系式

$$\tilde{\phi}(x,\lambda)\phi(x,\lambda)=e^{iJ\lambda x}G(\lambda)e^{-iJ\lambda x}. \tag{9}$$

在这些公式中，$G(\lambda)$ 为 λ 的某一任意非退化矩阵函数．

让我们来研究由下面渐近式确定的方程(1)的两组解 $\varphi^{\pm}$：

$$(\varphi^{\pm})_{ik}\to\delta_{ik}e^{ia_k\lambda x}, \quad x\to\pm\infty. \tag{10}$$

这两组解的每一组都是基本的，所以可求出这样的矩阵

$S(\lambda)$，使得

$$\varphi^-(x,\lambda) = \varphi^+(x,\lambda)S(\lambda). \tag{11}$$

我们利用熟知的恒等式:

$$-i\frac{d}{dx}\ln\det\varphi = \mathrm{Sp}(J\lambda + U) = \mathrm{Sp}J\lambda = \lambda\sum a_n,$$

从此恒等式得到

$$\det\varphi^+ = \det\varphi^-,$$

及

$$\det S(\lambda) = 1. \tag{12}$$

系统(1)的逆散射问题,一方面是按给定的矩阵函数 $S(\lambda)$ 反求矩阵函数 $U(x)$，而另一方面还得阐明,为了使这种反求成为可能，需对 $S(\lambda)$ 加上那些要求. 而后一问题并不是平凡的,因为矩阵 $S(\lambda)$ 所含的元素要比 $U(x)$ 多 ($U(x)$ 的对角元等于零).

下面让我们来研究关于矩阵 $S(\lambda)$ 的因子分解问题,也即把此矩阵表示成下面形式:

$$S^+ = SS^-, \tag{13}$$

式中 S^+, S^- 为形如下面的三角矩阵:

$$S^+ = \begin{bmatrix} S_{11}^+ & S_{12}^+ & S_{13}^+ & \cdots \\ 0 & S_{22}^+ & S_{23}^+ & \cdots \\ 0 & 0 & S_{33}^+ & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix},$$

$$S^- = \begin{bmatrix} S_{11}^- & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ S_{21}^- & S_{22}^- & 0 & 0 & \cdots \\ S_{31}^- & S_{32}^- & S_{33}^- & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \tag{14}$$

S^+, S^- 矩阵的元素可由(13)得到的某些线性方程组的解来确定. 联系 S^+ 和 S^- 的最简单一个方程为:

$$S^+_{NN} = S_{NN}S^-_{NN}. \tag{15}$$

其次我们有

$$S^+_{iN} = S_{iN}S^-_{NN}.$$

对于量 $S^-_{N-1,N-1}$ 和 $S^-_{N,N-1}$ 产生下两个方程:

$$\begin{aligned} S^+_{N-1,N-1} &= S_{N-1,N-1}S^-_{N-1,N-1} + S_{N-1,N}S^-_{N,N-1}, \\ 0 &= S_{N,N-1}S^-_{N-1,N-1} + S_{N,N}S^-_{N,N-1}. \end{aligned} \tag{16}$$

类似地得到其余的方程. 从(15)和(16)还可看出，因子分解问题不是完全单值的,即 $S^\pm$ 矩阵的其中之一，它的对角元可任意给出. 为了消除这种非单值性,可以这样选择它们,使得 $S^\pm$矩阵的元素完全地用 S 矩阵的元素来表示. 于是

$$S^+_{NN} = S_{N,N}$$

$$S^+_{N-1,N-1} = S_{N-1,N-1}S_{NN} - S_{N-1,N}S_{N,N-1},$$

一般,

$$S^+_{kk} = \Delta^-_{N-k+1}, \tag{17}$$

式中 Δ^-_k 是S 矩阵的 k 阶下主子式. 这时,按归纳法很容易证明

$$S^-_{kk} = \Delta^-_{N-k}, \qquad \Delta^-_0 = 1. \tag{18}$$

$S^\pm$ 矩阵的其余元素也是由 S 矩阵的子式所组成的. 我们用 S^- 右乘关系式(11)来引入新的矩阵 χ^+:

$$\chi^+ = \varphi^+S^+ = \varphi^-S^-. \tag{19}$$

从(19)得到,当 $x \to \pm\infty$ 时,χ^+ 的解有下面形式的“三角”渐近式:

$$\begin{aligned} &\chi^+_{ik} \to 0, \quad i > k, \\ &\chi^+_{kk} \to \Delta^-_{N-k+1}(\lambda)e^{i\lambda a_k x}, \quad x \to +\infty, \\ &\chi^+_{ik} \to 0, \quad i < k \quad 当\ x \to -\infty时. \end{aligned} \tag{20}$$

从因子分解问题的单值可解性得到,χ^+ 完全由这些渐近式确定; 同时自然

$$\chi^+_{kk} \to \Delta^-_{N-k}(\lambda)e^{i\lambda a_k x}, x \to -\infty.$$

在构造第一章所研究的逆问题时，由类型(10)这样的渐近值所确定的 Jost 函数的解析性质起着基本的作用．一般来讲，对我们的情形，函数 $\varphi^{\pm}(x, \lambda)$ 不允许从 λ 的实轴作任何解析延拓．但非常好的是，在 λ 上半平面，方程(1)仍然存在解析解，而且这种解析解就是根据公式(19)所引入的 $\chi^{+}(x, \lambda)$ 矩阵．

为了方便，代替 χ^{+} 矩阵而研究系统(5)的解

$$\psi^{+} = \chi^{+} e^{-iJ\lambda x}.$$

这种解的渐近式除对角元外同 χ^{+} 相同(参看(20))，它的对角元有下面渐近形式：

$$\psi_{kk}^{+} \to \Delta_{N-k+1}^{-}(\lambda) \qquad 当\ x \to +\infty\ 时,$$

$$\psi_{kk}^{+} \to \Delta_{N-k}^{-}(\lambda) \qquad 当\ x \to -\infty\ 时.$$

下面我们证明 ψ_{ik}^{+} 矩阵满足下面的积分方程：

$$\psi_{ik}^{+} = i\int_{-\infty}^{x} \sum_{j} U_{ij}(x')\psi_{jk}^{+}(x', \lambda)e^{i\lambda(a_i - a_k)(x - x')}dx', \ i < k,$$

$$\psi_{kk}^{+} = \Delta_{N-k+1}^{-}(\lambda) - i\int_{x}^{\infty} \sum_{j} U_{kj}(x)\psi_{jk}^{+}(x', \lambda)dx', \tag{21}$$

$$\psi_{ik}^{+} = -i\int_{x}^{\infty} \sum_{j} U_{ij}(x')\psi_{jk}^{+}(x', \lambda)e^{i\lambda(a_i - a_k)(x - x')}dx', \ i > k.$$

实际上，直接对公式(21)进行微商，很容易证明系统(21)的解满足方程(5)．从另外一方面看，很容易验证，当 $x \to \pm\infty$ 时，考虑到(3)，从而实现了渐近式(20)．

现在我们对 $U(x)$ 加以“截断”，即假定在某个大的间隔 $(-L, L)$ 之外，函数 $U(x) = 0$．因此矩阵函数 $\varphi^{\pm}(x, \lambda)$ 现在成为下面柯西问题的解：

$$\varphi_{ik}^{\pm}(x, \lambda) = \delta_{ik}e^{ia_k x}\big|_{x=\pm L} \tag{22}$$

因而，$\varphi^{\pm}(x, \lambda)$ 是 λ 的整函数．可把关系式(11)改写成下面形式：

$$S(\lambda) = (\varphi^+(x,\lambda))^{-1}\varphi^-(x,\lambda). \tag{23}$$

φ^+ 的逆矩阵是具有下面初始条件的方程(4)的解:

$$(\varphi^+_{ik}(x,\lambda))^{-1} = \delta_{ik}e^{-ia_k\lambda x}|_{x=L}$$

从而这种逆矩阵也是 λ 的整函数. 因而, $S(\lambda)$ 为 λ 的整函数; 在我们所选择的因子分解方法之下, $S^\pm$ 矩阵(以及同它们相联系的 χ^+) 同样也是参数 λ 的整函数.

在截断之后,方程(21)采用下面形式:

$$\begin{aligned}
\psi^+_{ik} &= i\int_{-L}^{x}\sum_j U_{ij}(x')\psi^+_{jk}(x',\lambda)e^{i\lambda(a_i-a_k)(x-x')}dx', \quad i<k,\\
\psi^+_{kk} &= \Delta^-_{N-k+1}(\lambda) - i\int_x^L\sum_j U_{kj}(x')\psi^+_{jk}(x',\lambda)dx', \qquad (24)\\
\psi^+_{ik} &= -i\int_x^L\sum_j U_{ij}(x')e^{i\lambda(a_i-a_k)(x-x')}\psi^+_{jk}(x',\lambda)dx', \quad i>k.
\end{aligned}$$

在 λ 为实的情形下, 对 (24) 作极限过渡 $L\to\infty$, 从中得到 (21). 但在 λ 为复的情形下, 作这种极限过渡的可能性并不明显, 因为当 $L\to\infty$ 时(24)中的积分可能发散. 注意到数 a_i 是有序的(即如果 $j>i$, $a_i>a_j$) 从而我们证实,在 λ 的上半平面,这样的极限过渡是可能的;但一般来讲, 如果仅仅满足条件(3),在下半平面却不可能.这就意味着函数 $\psi^+_{ik}(x,\lambda)$ 允许解析延拓到 λ 的上半平面.

假设 $\mathrm{Im}\lambda>0$, $|\lambda|\to\infty$. 从(24)我们有

$$\psi^+_{ik} = \Delta^-_{N-k+1}\delta_{ik} + O(1/\lambda). \tag{25}$$

当 x 趋于 $\pm\infty$ 并利用渐近式(20),在 $|\lambda|\to\infty$ 情形下我们得出下面结果:

$$\Delta^-_k - \Delta^-_{k-1} = O(1/\lambda).$$

又因 $\Delta^-_0 = 1$, 由此我们有

$$\Delta^-_k = 1 + O(1/\lambda). \tag{26}$$

考虑到(26),从(24)我们有

$$\psi_{ik}^{+} = \delta_{ik} + \frac{U_{ik}}{\lambda(a_i - a_k)} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{27}$$

或者

$$U = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda[J, \psi^{+}]. \tag{28}$$

公式(28)指出，为了确定U只须求出当$\lambda\to\infty$时函数ψ^{+}的渐近式. 除了因子分解(13)以外，还可以研究下面的因子分解:

$$R^{-} = SR^{+}, \tag{29}$$

式中R^{-}，R^{+}是形如(14)的三角矩阵.象前面一样，如果假定$R^{\pm}(\lambda)$矩阵的元素完全依赖于$S_{ij}(\lambda)$，那么这种因子分解也是单值的. 这时$R_{kk}^{+} = \Delta_k^{+}(\lambda)$, $R_{kk}^{+} = \Delta_{k-1}^{+}(\lambda)$，式中$\Delta_k^{+}(\lambda)$为$S(\lambda)$矩阵的上主子式,且 $\Delta_0^{+} = 1$.

让我们来确定系统(1)的解:

$$\chi^{-} = \varphi^{-}R^{+} = \varphi^{+}R^{-}. \tag{30}$$

重复上面所作的讨论可以证明，$\chi^{-}(x,\lambda)$以及$\psi^{-} = \chi^{-}e^{-i\lambda Jx}$和子式$\Delta_k^{+}(\lambda)$允许解析延拓到下半平面并且存在这样一些渐近值:

$$\begin{aligned} &\psi_{ik}^{-} \to \delta_{ik} + O(1/\lambda), \\ &\Delta_k^{+} \to 1 + O(1/\lambda), \\ &|\lambda| \to \infty, \mathrm{Im}\lambda < 0. \end{aligned} \tag{31}$$

现在让我们回到方程(4). 用下面渐近值来确定方程(4)的解$\tilde{\varphi}^{\pm}$:

$$(\tilde{\varphi}^{\pm})_{ik} \to \delta_{ik}e^{-i\lambda a_i x}, \qquad x\to\pm\infty.$$

让我们用下面条件来引入$\tilde{S}$矩阵:

$$\tilde{\varphi}^{-} = \tilde{S}\tilde{\varphi}^{+}.$$

显然，$\tilde{\varphi}^{\pm} = (\varphi^{\pm})^{-1}$，$\tilde{S} = S^{-1}$. 因为 $\det S = 1$，所以$\tilde{S}$矩阵的元素完全通过S矩阵的元素来表示.

下面让我们研究$\tilde{S}$矩阵的两个完全因子分解:

$$\tilde{S}^+ = \tilde{S}^-\tilde{S}, \qquad \tilde{R}^- = \tilde{R}^+\tilde{S}, \tag{32}$$

式中

$$\tilde{S}^+ = (S^+)^{-1}\Delta^-, \qquad \tilde{S}^- = (S^-)^{-1}\Delta^-;$$
$$\tilde{R}^+ = (R^+)^{-1}\Delta^+, \qquad \tilde{R}^- = (R^-)^{-1}\Delta^+,$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta^- &= \det S^- = \det S^+ = \prod_{k=1}^{N-1} \Delta_k^-, \\ \Delta^+ &= \det R^- = \det R^+ = \prod_{k=1}^{N-1} \Delta_k^+. \end{aligned} \tag{33}$$

让我们来确定方程(4)的两组解:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^+ &= \tilde{S}^+\tilde{\varphi}^+ = \tilde{S}^-\tilde{\varphi}^-, \\ \tilde{\chi}^- &= \tilde{R}^+\tilde{\varphi}^- = \tilde{R}^-\tilde{\varphi}^+, \end{aligned} \tag{34}$$

以及方程(6)的相应解:

$$\tilde{\psi}^\pm = e^{i\lambda Jx}\tilde{\chi}^\pm.$$

显然，函数 $\tilde{\chi}^+$ 在参数 λ 的上半平面是解析的，而 $\tilde{\chi}^-$ 在参数 λ 的下半平面是解析的,并且同 $\tilde{\chi}^\pm$ 一样，在无穷远处，$\tilde{\chi}^\pm$ 为单位矩阵.

对于矩阵 $\tilde{\psi}$, ψ 之积,按照公式(9)我们有

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^-\psi^+ &= e^{iJ\lambda x}G_1(\lambda)e^{-iJ\lambda x}, \\ \tilde{\psi}^+\psi^- &= e^{iJ\lambda x}G_2(\lambda)e^{-iJ\lambda x}, \end{aligned} \tag{35}$$

式中

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) &= \tilde{R}^+(\lambda)S^-(\lambda) = \tilde{R}^-(\lambda)S^+(\lambda), \\ G_2(\lambda) &= \tilde{S}^-(\lambda)R^+(\lambda) = \tilde{S}^+(\lambda)R^-(\lambda). \end{aligned} \tag{36}$$

公式(36)给出求解(1)的逆散射问题方法：即必须先按 $S(\lambda)$ 求出 $G_{1,2}$ 矩阵的其中之一，这归结为求解有限个线性代数方程,然后求解属于每一个 x 的黎曼问题 (35) 的其中之一．在两种情形中的迴路 Γ 皆为实轴，而且黎曼问题的归一化在这

两种情形中都是标准的——当 $\lambda=\infty$ 时归一成单位矩阵.

假设 $N=2$。于是

$$S=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \quad S_{11}S_{22}-S_{12}S_{21}=1.$$

作因子分解,我们得到

$$\begin{aligned}
S^{+}&=\begin{bmatrix} 1 & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{bmatrix}, & S^{-}&=\begin{bmatrix} S_{22} & 0 \\ -S_{21} & 1 \end{bmatrix},\\
\tilde{S}^{+}&=\begin{bmatrix} S_{22} & -S_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \tilde{S}^{-}&=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix},\\
R^{+}&=\begin{bmatrix} 1 & -S_{12} \\ 0 & S_{11} \end{bmatrix} & R^{-}&=\begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ S_{21} & 1 \end{bmatrix},\\
\tilde{R}^{+}&=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & \tilde{R}^{-}&=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -S_{21} & S_{11} \end{bmatrix},\\
G_{1}&=\begin{bmatrix} 1 & S_{12} \\ -S_{21} & 1 \end{bmatrix}, & G_{2}&=\begin{bmatrix} 1 & -S_{12} \\ S_{21} & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{37}$$

分析公式(37)可以得出一个重要结论. 即,在黎曼问题中的 G_1 和 G_2 矩阵仅含有 S 矩阵的两个元素,S_{12} 和 S_{21},这正好同 U 矩阵的非零元素个数相同. 所以按 G_1 或 G_2 矩阵反求 S 矩阵的问题不是平凡的. 求解此问题时还必须利用 S 对角元的解析性质. 在本情形中,元素 S_{11} 在下半平面解析,而 S_{22} 在上半平面解析. 在一般情形中也是如此. $G_{1,2}$ 矩阵含有 $N(N-1)$ 个独立元素,因此当按 $G_{1,2}$ 反求 S 矩阵时,必须利用 S 矩阵主子式的解析性质,下主子式在上半平面解析而上主子式在下半平面解析. S 矩阵主子式的解析性质和行列式等于 1 等条件同黎曼问题可解性条件一起共同成为确定 S 矩阵充分条件的完备集. 但证明这一事实超出了本书的范围.

上面两个黎曼问题是等价的,所以今后我们只讨论二者之一,例如同 $G_1(\lambda)$ 矩阵相联系的黎曼问题. 但这个问题不

一定是正则的，因为子式 $\Delta_k^+(\lambda)$，$\Delta_k^-(\lambda)$ 在它们的解析区域中可存在有限个零点．下面我们就指出，黎曼问题的零点同这些零点有关系．

假设势 $U(x)$ 在间隔 $(-L, L)$ 之外被"截断"，并且子式 Δ_{N-k+1}^- 在点 $\lambda=\lambda_0$ 处有零点．于是三角矩阵 $S^\pm$ 在此点上是退化的，其中 $S_{kk}^+=0$ 及 $S_{k-1,k-1}^-$ 也等于零．χ^+ 矩阵也是退化的，它的秩等于 $N-1$．因而存在唯一的向量 c，对此向量来说，$\chi^+c=0$．我们利用公式(19)并约去非退化矩阵 φ^+，φ^- 得到

$$S^+c=0, \qquad S^-c=0. \tag{38}$$

从 S^+ 和 S^- 矩阵的三角性很容易得到，向量 c 总共只有两个非零分量 c_{k-1} 和 c_k．由此可见，当 $\lambda=\lambda_0$ 时

$$\chi_{k-1}^+=\mathrm{const}\cdot\chi_k^+. \tag{39}$$

现在让我们令 $L\to\infty$．这时公式(39)仍然成立，从而证明了这样一个事实：$\lambda=\lambda_0$ 也是黎曼问题在上半平面的零点．又因 $\tilde{S}^+$ 和 $\tilde{S}^-$ 矩阵是由 S^+，S^- 矩阵的代数余子式组成的，所以它们同样是退化的，故 $\tilde{\chi}^+$ 矩阵也和它们一道在点 $\lambda=\lambda_0$ 处退化．按以往，$\tilde{\chi}^+$ 的秩仍然等于 $N-1$，但其分量之间的线性关系之普遍形式却无法计算，这是因为 $\tilde{S}^+$，$\tilde{S}^-$ 矩阵的所有对角元，除了一个之外，其余全等于零．用类似方法确定，子式 Δ_k^+ 的零点同样是黎曼问题在下半平面的零点．公式(39)表明，在主子式中，其中有一个主子式，它的诸简单零点乃是黎曼问题零点的一些极特殊情形．而在黎曼问题简单零点的普遍情形中，矩阵 ϕ^+（以及相应的 χ^+）可以有非常强的退化——存在任意秩；甚至就连秩等于 $N-1$ 的情形，它的列之间的关系也可能存在更普遍的形式．为了实现这些变形，必须把同一点 λ_0 变成若干个主子式的零点．例如，为使链(39)的右边含有 p 个元素

$$\chi_{k-1}^{+}=c_0\chi_k^{+}+\cdots+c_p\chi_{k+p}^{+},$$

则必须使以下 p 个主子式同时变成零:

$$\Delta_{N-k+1},\cdots,\Delta_{N-k-p+1}.$$

今后我们将感兴趣的仅仅是 §2 中所研究的情形，在这种情形中，黎曼问题在上半平面和下半平面有相同的零点数:

$$\begin{aligned}&\det\chi^{+}|_{\lambda=\lambda_n}=0, &\det\tilde{\chi}^{-}|_{\lambda=\mu_n}=0,\\ &\operatorname{Im}\lambda_n>0, &\operatorname{Im}\mu_n<0,\end{aligned}\tag{40}$$

其中 $\chi^{+}|_{\lambda=\lambda_n}$ 和 $\tilde{\chi}|_{\lambda=\mu_n}$ 矩阵的退化幂次相同. 又因 χ^{+} 矩阵的列同 $\tilde{\chi}$ 矩阵的行之间的线性联系系数显然与 x 无关，故可以引进两个子空间:

$$N_n^0=\operatorname{Im}\tilde{\chi}^{-}|_{\lambda=\mu_n},\qquad M_n^0=\ker\chi^{+}|_{\lambda=\lambda_n},$$

$$\frac{dN_n^0}{dx}=\frac{dM_n^0}{dx}=0,\qquad M_n^0\oplus N_n^0=C^N.$$

为了求解具有零点的黎曼问题，我们需要下面的子空间:

$$N_n=\operatorname{Im}\tilde{\phi}^{-}(\mu_n),\qquad M_n=\ker\phi^{+}(\lambda_n).\tag{41}$$

显然,

$$N_n=e^{iJ\mu_nx}N_n^0,\qquad M_n=e^{-iJ\lambda_nx}M_n^0.\tag{42}$$

$S(\lambda)$ 矩阵(更确切地说，$G(\lambda)$ 矩阵，数 μ_n，λ_n 以及子空间 N_n^0 和 M_n^0)的作用正是散射数据的集合，按照这种集合借助于求解具有零点的黎曼问题来反求势.

$\Delta_n^{\pm}$ 的零点的贡献很像在第一章所研究的逆散射问题例子中的分立谱的贡献.

在 J 为正矩阵条件下，问题(1)不可能存在通常意义下的本征值；这是因为在 x 轴两个端点的其中一个端点处，当 λ 为任意时，矩阵 $e^{iJ\lambda x}$ 的所有元素都以指数形式增长. 但黎曼问题的零点仍然是(在某种广义的意义上)谱问题的本征值. 假设在点 $\lambda=\lambda_0$ 处，$\operatorname{Im}\lambda_0>0$,

$$\Delta_{N-k+1}(\lambda_0)=0,\qquad \Delta_{N-k}\neq 0.$$

让我们来研究 χ^+ 矩阵的第 k 列. 考虑到(38), 当 $x \to +\infty$ 时, 在它的渐近值中出现指数 $e^{i\lambda_0 a_i x}$, $i < k$; 而当 $x \to -\infty$ 时在渐近式中也出现指数 $e^{i\lambda_0 a_i x}$, $i \geqslant k$. 所以当 $x \to \pm\infty$ 时向量 $\chi_k e^{i\lambda_0 bx}$ (其中 $a_k < b < a_{k-1}$) 以指数形式衰减. 这种讨论使我们能简略陈述谱问题(1)的广义本征值概念,即如果存在这样的实数 b, 使得

$$\phi_i e^{-i\lambda_0 bx} \to 0, \qquad \text{当 } x \to \pm\infty \text{ 时}, \tag{43}$$

那么点 λ_0 便称作广义本征值, 而向量 ϕ_i 称作广义本征函数. 显然,如果存在数 b, 则 $a_1 > b > a_N$ 同时数 b 可以落入在诸数 a_k 之间的区间之一上. 假设 $a_k < b < a_{k-1}$. 从分析向量 ϕ_i 的分量渐近值很容易证实, 条件(43)对此区间内的所有数来说都成立. 所以可按照诸数 a_i 之间的含有 b 的那个间隔对广义本征值加以分类. 由此可见,广义本征值便出现 $N-1$ 种类型. 这些本征值可以位于任何一个半平面上. 在上半平面内,它们同 S 矩阵的下主子式的零点相重合,而在下半平面同上主子式的零点相重合. 在我们所研究的情形中, 在上半平面和下半平面的广义本征值的个数相同. 而在一般情形中所有类型的广义本征值相重合的点 $\lambda = \lambda_0$ 对应黎曼问题的一个简单零点.

谱问题 (1) 通常要利用下面假定: 势 U 满足某些附加条件. 假设 $B = B^+ = B^{-1}$ 是由数 ± 1 组成的对角矩阵,并假设势 Q 满足下面关系式:

$$Q^* = -BQB. \tag{43'}$$

(在这里,符号*表示厄米共轭.)

显然,

$$U^* = BUB.$$

从方程(1)很容易得到下一个关系式:

$$i \frac{\partial}{\partial x} B\varphi^* B = B\varphi^* B(I\lambda + U). \tag{44}$$

把(44)同(4)作比较并利用渐近式相同,我们得到

$$\varphi^{-1} = B\varphi^* B, \qquad \tilde{\varphi}^{\pm} = B\varphi^{\pm *} B, \tag{45}$$

由此得到等式:

$$\tilde{S} = S^{-1} = BS^* B.$$

特别是,当 $B = 1$ 时 S 矩阵是么正的. 对于三角因子我们有

$$\tilde{R}^{+} = S^{-*} B, \qquad \tilde{S}^{+} = R^{-*} B,$$
$$\tilde{R}^{-} = BS^{+*}, \qquad \tilde{S}^{-} = BR^{+*}.$$

由此对 G 矩阵,我们有

$$G^* = BGB. \tag{46}$$

基本解析函数 $\psi^{\pm}$, $\tilde{\psi}^{\pm}$ 服从下面对合:

$$\tilde{\psi}^{\pm}(\lambda) = B\psi^{\mp}(\lambda) B. \tag{47}$$

从(47)得到,对在上、下半平面皆为解析的矩阵来说,它们的退化点(即黎曼问题的零点)彼此共轭:

$$\mu_n = \bar{\lambda}_n.$$

从(47)同样得到,借助于 B 矩阵所定义的度规,子空间 M_n 和 N_n 二者正交:

$$(N_n, BM_n) = 0, \tag{48}$$

而投影算子 P 是 B 厄米的:

$$P^* = BPB. \tag{49}$$

由此可见,在满足条件(43)的情形下,给出矩阵 ψ^{+} 在上半平面的零点分布和退化就足够了.

§4. N 波问题

谱问题(3.1)适用于求解在非线性光学用到的重要微分方程系统. 除了(3.1)以外,让我们研究下面方程:

$$-i\varphi_t = (I\lambda + V)\varphi, \tag{1}$$

式中 $I = \mathrm{diag}\, b_i$ 是给定的实的对角矩阵,并且 $[J, I] = 0$.

(3.1) 对 t 微商，(1) 对 x 微商，并使二阶导数按 λ 恒等，得到下面方程组：

$$[J, V] = [I, U], \tag{2}$$

$$U_t - V_x + i[U, V] = 0. \tag{3}$$

相对 U, V 可以解方程(2)：$V = [I, Q]$, $U = [J, Q]$. 于是从(3)我们有

$$[J, Q_t] - [I, Q_x] + i[[J, Q], [I, Q]] = 0. \tag{4}$$

系统(4)也是提到过的可积系统. 如果矩阵 J, I 是非退化的，那么很容易证明这种系统允许 Lax 表象. 相应的 L-A 对儿，由下面算子组成：

$$L = J^{-1}\left(i\frac{d}{dx} + U\right), \qquad A = I^{-1}\left(i\frac{d}{dt} + V\right). \tag{5}$$

如果假定势满足关系式(3.43′)，则系统(4)具有物理意义. 很容易验证，这种关系式同方程(4)并不矛盾. 加上条件(3.43′)之后，方程(4)的未知函数的数目将减少一半. 这种借助于加上同方程相容的附加条件来减少未知函数数目的方法，我们将称作简化. 而同所给方程相容的简化的可枚举问题成为可积系统理论的最重要问题之一.

现在我们着手描述方程(4) 经简化 (3.43′)之后所产生的系统. 在 $B = 1$ 这种最简单情形中，为了方便，在此系统中对 Q 矩阵的上一半引入下面变量：

$$Q_{ik} = \frac{w_{ik}}{\sqrt{a_i - a_k}}, \qquad i < k. \tag{6}$$

采用这些变量系统(4)便成为下面的哈密顿系统：

$$\frac{\partial w_{ik}}{\partial t} - v_{ik}\frac{\partial w_{ik}}{\partial x} - i\frac{\partial H_{\text{int}}}{\partial \bar{w}_{ik}} = 0, \tag{7}$$

式中

$$v_{ik} = \frac{b_i - b_k}{a_i - a_k}, \tag{8}$$

而 H_{int} 是相互作用哈密顿量：

$$H_{int} = \sum_{i<k<j} \varepsilon_{ikj}(w_{ik}w_{kj}\bar{w}_{ij} + \bar{w}_{ik}\bar{w}_{kj}w_{ij}), \tag{9}$$

式中

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{a_i b_k - a_k b_i + a_k b_j - a_j b_k + a_j b_i - a_i b_j}{[(a_i - a_k)(a_i - a_j)(a_k - a_j)]^{1/2}}.$$

系统(7)从 $N = 3$ 开始便是非平凡的. 在这种情形中，引入表示

$$u_1 = w_{12}, \quad u_2 = w_{23}, \quad u_3 = w_{13},$$

$$-v_1 = v_{12}, \quad -v_2 = v_{23}, \quad -v_3 = v_{13}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{123},$$

我们得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= i\varepsilon\bar{u}_2 u_3, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= i\varepsilon\bar{u}_1 u_3, \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} &= i\varepsilon u_1 u_2. \end{aligned} \tag{10}$$

对速度(8)我们有

$$\frac{v_2 - v_3}{v_1 - v_3} = -\frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} < 0. \tag{11}$$

从(10)，(11)可看出，在方程组中，变量 u_1，u_2 以对称形式出现，然而变量 u_3 可分离出来. 其原因在对系统(10)进行下面物理解释之后便清楚了. 在具有二次非线性介质中，这种系统描述具有复包络 u_1，u_2，u_3 的三个波包的相互作用. 在这种相互作用中，波 u_3(《泵波》)衰变成波 u_1 和 u_2 以及这两个波聚变成泵波的逆过程：

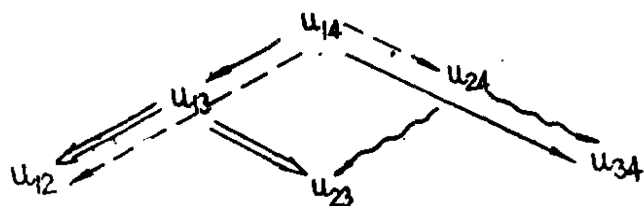
$$u_3 \longleftrightarrow u_1 + u_2. \qquad (12)$$

量 v_i 乃是波包的群速度．而关系式(11)表明，对这三个波在计算系统上可作某种限制，例如，当采用泵波为静止的计算系统时，则波 u_1 和 u_2 的速度方向相反．

当 $N>3$ 时，系统(7)描述 $N(N-1)/2$ 个不同类型波的相互作用．而相互作用哈密顿量(9)由相应基本过程 $w \longleftrightarrow u+v$ 类型的项——$(\bar{w}uv+\bar{u}\bar{v}w)$ 所组成，但它所包含的过程却远远超过这类基本过程．例如，在 $N=4$ 的情形中，允许有以下过程：

$$u_{14} \longleftrightarrow u_{12} + u_{24},$$
$$u_{14} \longleftrightarrow u_{13} + u_{34},$$
$$u_{24} \longleftrightarrow u_{23} + u_{34},$$
$$u_{13} \longleftrightarrow u_{12} + u_{23}.$$

所有这些过程可用下面图解来描述：



可以看出，所有波分成以下三种类型：单元波 (u_{12}, u_{23}, u_{34})，二元复合波 $(u_{13}$ 和 $u_{24})$ 及三元复合波 (u_{14})．二元复合波可以衰变成两个单元波；而三元复合波可衰变成一个二元复合波和一个单元波．

在一般情形中也出现类似情形．在一般系统中共有 $N-1$ 个振幅为 $u_{k,k+1}$ 的单元波类型；共有 $N-2$ 个二元复合波类型 $(u_{k,k+2})$ 等等．直到所有 $N-1$ 个单元波组成唯一的波 u_{1N} 为止．所有这些过程按下面方式进行：

$$u_{pq} \longleftrightarrow u_{pr} + u_{rq}, \qquad 其中\ p<r<q.$$

在 $N=3$ 的情形中，相互作用波的群速度只是以不等式(11)

为条件．但从 $N=4$ 开始，对速度值和相互作用常数 ε_{ijk} 还要加上代数条件，并且这种条件的数目随号码 N 的增大而迅速增加．

现在假设 $B\neq 1$．我们表示 $B=\operatorname{diag}r_i$，其中 $r_i=\pm 1$．对这种情形变量 w_{ik} 已经不是正则变量，因此需要引进新变量来代替它们：

$$\varphi_{ik}=r_i r_k w_{ik}=\frac{r_i r_k Q_{ik}}{\sqrt{a_i-a_k}}. \tag{13}$$

让我们注意到，采用原始变量 $u_{ik}=(a_i-a_k)Q_{ik}$，系统(4)形式上也是哈密顿系统：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_{ik}}{\partial t}-v_{ik}\frac{\partial u_{ik}}{\partial x}&=i\frac{\delta H}{\delta u_{ki}},\\ \frac{\partial u_{ki}}{\partial t}-v_{ik}\frac{\partial u_{ki}}{\partial x}&=-i\frac{\delta H}{\delta u_{ik}}\end{aligned} \tag{14}$$

式中

$$H=-\sum_{i<k<j}\varepsilon_{ikj}(u_{ik}u_{kj}u_{ji}+u_{ki}u_{kj}u_{ij}), \tag{15}$$

不过哈密顿量是复的．当把(13)代入到(15)，并考虑到下面情形：

$$u_{ki}=r_i r_k\bar{u}_{ik}$$

便产生实的哈密顿量．

下面让我们研究一下，在 $N=3$ 这种最简单情形时，系统会有哪些不同的变形．假设 $B=\operatorname{diag}(-1,1,1)$．在这种情形中系统(4)变成下面形式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial x}&=i\varepsilon u_2u_3,\\ \frac{\partial u_2}{\partial t}+v_2\frac{\partial u_2}{\partial x}&=i\varepsilon u_1\bar{u}_3,\\ \frac{\partial u_3}{\partial t}+v_3\frac{\partial u_3}{\partial x}&=i\varepsilon u_1\bar{u}_2,\end{aligned} \tag{16}$$

式中

$$u_1 = \varphi_{12} = -\omega_{12}, \quad u_2 = \varphi_{23} = w_{23},$$

$$u_3 = \varphi_{13} = -w_{13};$$

$$v_1 = -v_{12}, \quad v_2 = -v_{23}, \quad v_3 = v_{13}.$$

系统(16)同(10)的区别仅仅在于：这里的泵波是 u_1. 再考虑不等式(11)，下面差别是本质的：在泵波 u_1 为静止的计算系统中，波 u_2 和 u_3 现在在同一个方向上运动. 如果 $B = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$，则产生类似的系统(借助代换 $u_1 \longleftrightarrow u_2$).

现在假设 $B = \mathrm{diag}(1, -1, 1)$. 在这种情形中产生下面系统：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} &= i\varepsilon \bar{u}_2 \bar{u}_3, \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} &= i\varepsilon \bar{u}_1 \bar{u}_3, \qquad (17) \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial x} &= i\varepsilon \bar{u}_2 \bar{u}_1.
\end{aligned}$$

在这里 $u_1 = \varphi_{12} = -w_{12}$, $u_2 = \varphi_{23} = -w_{23}$, $u_3 = \varphi_{13} = u_{13}$. 系统(17)描述三波相互作用的“爆炸不稳定性”，在这种相互作用中，三个波彼此相互加强. 在(17)中所有三个波都处于平等地位. 当 $N > 3$ 时所产生的系统乃是所描述的所有形式的系统的组合.

对于系统 (4) 的进一步简化问题是很有意义的. 一个自然的简化是把它变成纯实的方程 $\bar{Q} = iQ$. 假定 $u_i = iw_i$, 从(10)我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} &= \varepsilon w_2 w_3, \\
\frac{\partial w_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} &= \varepsilon w_1 w_3, \qquad (18) \\
\frac{\partial w_3}{\partial t} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial x} &= -\varepsilon w_1 w_2.
\end{aligned}$$

方程(18)是在非线性光学中所熟知的波包参量相互作用的“恰当共振”方程．另外一个简化是对散射数据加上一些新的限制．为此我们对方程(3.1)取复共轭从而证实，这时

$$\bar{\varphi}(\lambda)=\varphi(-\bar{\lambda}). \tag{19}$$

由此得到，黎曼问题的零点相对于虚轴以对称形式分布并且分成简单的(在虚轴上)和双重的(这种现象在 sin-Gordon 方程理论中已经遇到过(第一章).)．对 S 矩阵同样得到

$$\bar{S}(-\bar{\lambda})=S(\lambda). \tag{20}$$

对所有三角矩阵和 G 矩阵也出现类似的关系式．

如果对矩阵 J 和 I 加上一些特殊限制就可能有其它一些非平凡的简化．例如，假设 $N=3$，$J=\mathrm{diag}(a, 0, -a)$，$I=\mathrm{diag}(b_1, b_2, -b_1)$ 是两个对角矩阵．于是 $v_{12}=v_{23}$ 并且在假定 u 为厄米时，系统(10)可作 $u_1=u_2$ 的简化．这时系统(10)产生下面方程系统：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_1}{\partial t}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial x}=i\varepsilon\bar{u}_1u_3,\\&\frac{\partial u_3}{\partial t}+v_3\frac{\partial u_3}{\partial x}=i\varepsilon u_1^2,\end{aligned} \tag{21}$$

这种系统也是在非线性光学中所熟知的，它描述在非线性介质中的二次谐波振荡．

现在假设 $N=4$，$J=\mathrm{diag}(a_1, a_2, -a_2, -a_1)$，$I=\mathrm{diag}(b_1, b_2, -b_2, -b_1)$．于是，下面这种新的简化是可能的：

$$\bar{Q}=-CQ^{tr}C^{-1}, \tag{22}$$

式中 C 是下面两种形式之一的反对角矩阵：

$$C=\begin{bmatrix}0 & \cdots & & 1\\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & 0\end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

Q^{tr} 表示转置矩阵. 如果简化(22)与简化(3.43′)同时进行,那么它们之间应满足下面匹配条件:

$$CBC = \pm B.$$

在由这类简化所产生的系统中间，当 C 取(24)的形式并假定 $B = 1$ 所得到的系统是最有意义的. 这时

$$\begin{gathered} w_{24} = w_{13}, \qquad w_{34} = -w_{12}, \\ H_{int} = 2\varepsilon(w_{12}w_{23}\bar{w}_{13} + \bar{w}_{12}\bar{w}_{23}w_{13} + w_{12}w_{13}\bar{w}_{14} \\ + \bar{w}_{12}\bar{w}_{13}\bar{w}_{14}), \end{gathered} \tag{25}$$

而方程有下面形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{14}}{\partial t} + v_{14}\frac{\partial w_{14}}{\partial x} &= 2i\varepsilon w_{12}w_{13}, \\ \frac{\partial w_{13}}{\partial t} + v_{13}\frac{\partial w_{13}}{\partial x} &= 2i\varepsilon(w_{12}w_{23} + \bar{w}_{12}w_{14}), \\ \frac{\partial w_{12}}{\partial t} + v_{12}\frac{\partial w_{12}}{\partial x} &= 2i\varepsilon(\bar{w}_{23}w_{13} + \bar{w}_{13}w_{14}), \\ \frac{\partial w_{23}}{\partial t} + v_{23}\frac{\partial w_{23}}{\partial x} &= 2i\varepsilon\bar{w}_{12}w_{13}. \end{aligned} \tag{26}$$

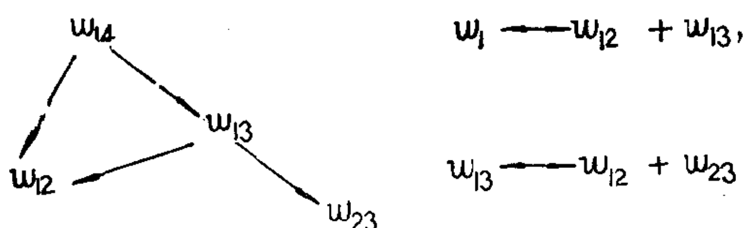
式中

$$\begin{gathered} \varepsilon = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{124} = -\varepsilon_{234} = -\varepsilon_{134}, \\ v_{12} = v_{34} = \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}, \quad v_{13} = v_{24} = \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}, \\ v_{23} = b_2/a_2, \qquad v_{14} = b_1/a_1. \end{gathered} \tag{27}$$

从(27)得到，不能任意选取速度 v_{ik}，它们之间存在下面关系式:

$$(v_{12} - v_{14})(v_{13} - v_{23}) + (v_{13} - v_{14})(v_{12} - v_{13}) = 0.$$

系统(26)按下面图形描述四波在非线性介质中的相互作用:



这种情形在"变型衰变不稳定性"(即存在"单身的"(холостой)反斯托克斯波 w_{14} 时,波 w_{13} 衰变成 w_{12} 和 w_{23})的情况下可以遇到.

§5. 孤子解

现在让我们来写出系统(4.4)的积分程序. 要注意到,对这种系统进行积分时,方程(3.1)和方程(4.1)起着完全同等的作用. 所以还应存在与(3.35)、(3.42)同样类型的公式,它们与(3.35)、(3.42)不同之处只是用了代换 $x \to t$, $J \to I$,这样一来,我们便得出如下结论:系统(4.4)的每一个解都对应同 x 和 t 无关的"散射数据"的集合,其中这里所指的"散射数据"包括矩阵 $G(\lambda)$、零点 λ_n 和 μ_n 以及子空间 M_n 和 N_n. 为了构造这种解必须在所有 x 和 t 情况下求解具有零点的黎曼问题:

$$\tilde{\psi}^-(x,t,\lambda)\psi^+(x,t,\lambda) = e^{i(Jx+It)\lambda}G(\lambda)e^{-i(Jx+It)\lambda} \tag{1}$$

其中黎曼问题的零点固定为 λ_n, μ_n, 并给出在这些零点处的子空间:

$$\begin{aligned} M_n &= e^{-i(Jx+It)\lambda_n}M_n^0, \\ N_n &= e^{i(Jx+It)\mu_n}N_n^0,. \end{aligned} \tag{2}$$

然后再利用公式(3.28)求出解 U. 如果对系统(4.4)作出某些简化,那么散射数据应服从相应的限制. 还必须着重指出,从我们所证明的关于函数 $\varphi^\pm$、$\tilde{\psi}^\pm$ 的解析性定理得出,我们可以得到系统(4.4)的任何一个满足条件 $\int|u|dx < \infty$ 的解. 散射

数据的定义方式取决于加在(4.4)上的边界条件．例如，如果给出(4.4)的柯西问题，那么散射数据是从研究函数 $\varphi^{\pm}(x, \lambda)$ 当 $x \to \pm\infty$ 时的渐近值以及当 $t=0$ 时问题(3.1) 的广义本征函数中得到的．类似地，如果给出关于 x 的柯西问题，则散射数据应从谱问题 (4.1) 中得到．如果给出更复杂的边值问题，那么必须得利用两个方程(3.1)和(4.1)．

在根据散射数据来构造 U 的一般情形中，必须得解奇异积分方程组．不过好在系统 (4.4) 的一些个别精确解的集合可以只解代数方程便能得到它们的显式形式．例如当 $S=G=1$ 时便是所谈的情形．相应的解我们将称之为孤子解．

下面我们只限于分析最简单一类孤子解，即当函数 $\psi^{\pm}$、$\tilde{\psi}^{\pm}$ 各自有一个极点 λ_0, μ_0 的情形．我们将假定简化 (3.43′) 的其中之一成立，所以 $\mu_0=\bar{\lambda}_0$．从公式(2.16)我们有

$$\psi^{+}=1-\frac{\lambda_0-\bar{\lambda}_0}{\lambda-\bar{\lambda}_0}P. \tag{3}$$

对势 U 来说，我们从公式(3.28)得到

$$U=(\lambda_0-\bar{\lambda}_0)[J, P]=2i\eta[J, P], \tag{4}$$

式中 $\lambda_0=\xi+i\eta$．当存在简化(3.43′)时，投影算子 P 完全由它自己的子空间 M 或者 N 的其中之一来确定．让我们提醒一下，

$$M=e^{-(Jx+It)\lambda_0}M_0=\ker\psi^{+}|_{\lambda=\lambda_0}=\mathrm{Im}P.$$

在 §3 中我们已经看到，如果黎曼问题的零点是简单的(在谱问题(3.1)的广义本征值中)，那么子空间 M_0 便是一维的．因此相应的投影算子 P 很容易构造．假设 M 是用带有下面分量的向量所组成的:

$$m_i=e^{-i(a_ix+b_it)\lambda_0}\alpha_i, \tag{5}$$

(式中 α_i 是给定的复的常数向量.) 投影算子 P 将全空间 C^N 投影到 M 上，因此，

$$P_{ij}=m_i n_j, \tag{6}$$

式中 n_j 是某一未知向量.

从条件 $P^2=P$ 我们有

$$\sum_i (m_i n_i)=1. \tag{7}$$

而从条件 $P^*=BPB(B=\mathrm{diag}r_i)$ 我们求得:

$$n_i=\lambda r_i \bar{m}_i, \qquad \bar{\lambda}=\lambda.$$

最后我们有

$$P_{ij}=r_j\frac{m_i\bar{m}_j}{\sum_k r_k|m_k|^2}.$$

对于势 U, 现在我们得到

$$u_{ij}=r_j(a_i-a_j)\frac{m_i\bar{m}_j}{\sum_k r_k|m_k|^2}. \tag{8}$$

公式(8)给出具有一维投影算子的单极点孤子解的显式形式. 对这种解的模我们有

$$|u_{ij}(x,t)|=\frac{2\tau(a_i-a_j)|\alpha_i||\alpha_j|\exp[(a_i+a_j)\tau x+(b_i+b_j)\eta t}{\sum_k r_k|\alpha_k|^2\exp[2(a_k x+b_k t)\eta]}. \tag{9}$$

公式 (9) 使我们能阐明各种类型孤子解的存在条件. 例如假设 $B=1$, $r_k=1$. 这时当 x 为有限时, (9) 式中的分母不能等于零;而当 $x\to\pm\infty$ 时, $|u_{ij}|$ 以指数形式衰减. 所以对任何形式的向量 α_k 都存在孤子解. 假设向量 α_k 总共只含有两个非零分量 α_i 和 α_j, 于是势仅有两个非零元素 u_{ij} 和 $\bar{u}_{ji}=\bar{u}_{ij}$. 这时

$$u_{ij}=\eta(a_i-a_j)\times\frac{\exp\{i\xi[(a_i+a_j)x\xi+(b_i+b_j)t\xi+\arg(\alpha_i-\alpha_j)]\}}{\mathrm{ch}\{\eta[(a_i-a_j)x+(b_i-b_j)t+x_0]\}}, \tag{10}$$

式中 $x_0=\frac{1}{\eta}\ln\left|\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right|$.

我们将把解(10)称作波 u_{ij} 的孤子．假设零点 $\lambda=\lambda_0$ 是 k 型广义本征值．于是向量 α_k 含有两个非零分量 α_{k-1}，α_k．势 U 不等于零的分量也将只有 $u_{k-1,k}$，$u_{k,k-1}$，从而我们得到以下结论：问题(3.1)的广义本征值对应系统(4.4)的非衰变的单元波的孤子．因此为了得到复合波 $u_{i,i+p}$，$p>1$ 的孤子，必须连续排列 p 个 S 矩阵的主子式使它们在点 $\lambda=\lambda_0$ 处都等于零．当 $\lambda=\lambda_0$ 时矩阵 x 的秩应为 $N-1$，而它的非零本征向量*) α 应有两个非零分量 α_i 和 α_i+p.

假设 $N=3$．下面让我们来研究当向量 α 的全部分量都不等于零时解(8)在 $t\to\pm\infty$ 情形下的渐近值.

很容易验证，非零渐近值仅出现在特征线 $x=v_{ik}t+c$ 上，式中 v_{ik} 是其中一个孤子(波 u_{ik} 的孤子)的速度，并且当 $t\to\pm\infty$ 时仅仅对应此孤子的元素 u_{ik}、u_{ki} 在此特征线上才不等于零．现在让我们来跟踪相应复合孤子(泵孤子)的分量 u_{13}．我们表示

$$(a_1-a_3)x+(b_1-b_3)t=z.$$

假设下面关系式成立：

$$\frac{b_2-b_3}{a_2-a_3}>\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}. \qquad (11)$$

于是，很容易证实，当 $t\to\infty$ 时元素 u_{13} 以指数形式趋于零，而当 $t\to-\infty$ 时，u_{13} 趋于质心位置为下式的泵孤子：

$$(x_0)_{13}=\frac{1}{r}\ln\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\right|. \qquad (12)$$

现在让我们来跟踪分量 u_{12} 和 u_{23}．当 $t\to-\infty$ 时，它们以指

*) 原文印成“零本征向量”．——译注

数形式趋于零．而当 $t\to+\infty$ 时，它们趋于相应于两个单元波的孤子，这两个孤子的质心位置分别为

$$
\begin{aligned}
(x_0)_{12} &= \frac{1}{\eta}\ln\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|,\\
(x_0)_{23} &= \frac{1}{\eta}\ln\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\right|.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

因此，解(8)描述一个复合孤子衰变成两个单元孤子．"衰变产物"的质心位置以对数形式依赖于量 α_2．当 $\alpha_2\to 0$ 时，衰变产物处在无穷远处，也即在时间为无限大时才出现衰变．分析具有二维投影算子(这时矩阵 $X|_{\lambda=0}$ 的秩等于 2，因而子空间 M 用两个向量来表征)的孤子解表明，这种解描述两个单元孤子聚变为泵孤子的逆过程．当满足同不等式(11)相反的不等式时，具有一维投影算子的解描述聚变，而具有二维投影算子的解描述复合孤子的衰变．

当 $N>3$ 时，情况就异常复杂了，具有唯一极点 $\lambda=\lambda_0$ 的诸孤子之意义在于描述所有可能的衰变过程以及相应各种不同矩阵元 u_{ij} 的单元孤子和种种复杂的复合孤子之间的相互作用．

我们将把所有这类现象称作孤子的非平凡相互作用以便区别它们的平凡相互作用——散射．非平凡相互作用仅对那些谱参数 λ 之值都相同的孤子才有可能；而黎曼问题的双极点解就已经描述两群孤子之间的碰撞了，在每群内部的孤子都有非平凡相互作用．

下面我们仅以 $N=3$ 为例来研究 $B\neq 1$ 的情形．设 $B=\mathrm{diag}(-1,1,1)$．显然，对这种情形来说，仅仅当 $\alpha_1=0$时，解(8)和(9)才不存在奇点．因此，在这种情形下，仅可存在一种形式的孤子，单元波的孤子 u_{23}；而另外一个单元波的孤子 u_{12} 和复合孤子 u_{13} 皆不存在，从而也只存在一种类型的广

义本征值.如果 $B = \mathrm{diag}(1, 1, -1)$ 则出现类似情形.于是,在系统(4.16)中没有孤子的非平凡相互作用.

如果 $B = \mathrm{diag}(1, -1, 1)$,则出现非常有意义的情况.在这种情形中,在短暂的时间内同样可以只存在一种类型的孤子——u_{13};但,在有限长时间内就可存在更普遍的解(8).让我们以至多差一个因子的精确度来研究表达式(9)的分母:

$$\Delta = 1 - |\beta_1|^2 e^{-\delta_1 x - \gamma_1 t} + |\beta_2|^2 e^{-\delta_2 x - \gamma_2 t}, \tag{14}$$

式中

$$\delta_1 = a_1 - a_2, \quad \delta_2 = a_1 - a_3, \quad \delta_2 > \delta_1 > 0;$$
$$\gamma_1 = b_1 - b_2, \quad \gamma_2 = b_1 - b_3.$$

如果

$$\frac{1}{\delta_1}\left(\ln|\beta_1|^2 \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_1} - \gamma_1 t\right) < \frac{1}{\delta_2}\left(\ln|\beta_2|^2 \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_2} - \gamma_2 t\right), \tag{15}$$

则表达式Δ没有零点. 假定β_1充分小,那么对任何t都可满足不等式(15).但,如果 $\gamma_1/\delta_1 \neq \gamma_2/\delta_2$,那么在充分大的正或负的 $t = t_0$ 条件下,此不等式被破坏. 如果此不等式在正t_0条件下被破坏,那么相应的解便描述在有限时刻内在某一点x_0处由于形成奇点而产生的爆炸不稳定性过程. 如果$t_0 < 0$,则相应的解便描述在初始时刻存在奇点的"耗散"(рассасывание) 逆过程.

§6. 借助于黎曼问题的可积系统

正象我们在n波问题的例子中曾见到的那样,为了构造孤子的这种特解,没有必要去全面研究谱问题及相应的黎曼问题.因为研究这类问题必须包括证明解析解的存在性定理,从而这类研究多半是相当困难的问题,所以下面我们将论述

一种直接方法以便借助于黎曼问题来计算可积系统及其孤子解. 在这种方法中起关键性作用的公式乃是把我们在 n 波情形中所得到的公式(5.1)、(5.2)加以推广所得到的. 下面所研究的可积系统是 (3.1) 和 (4.1) 这两种类型方程的相容条件, 但是,在下面将研究的系统中,对谱参数 λ 存在更普遍的依赖关系.

现在让我们来研究微分方程的超定系统:

$$\varphi_x = U\varphi, \qquad \varphi_t = V\varphi. \tag{1}$$

在这里 U 和 V 是以有理形式依赖于复参数 λ 的复的$(N \times N)$矩阵. 这两个方程的相容条件有下面形式:

$$U_t - V_x + [U,V] = 0. \tag{2}$$

如果函数 U 的极点(考虑到这些极点的重数)数目等于 N_1, 而函数 V 的等于 N_2, 那么函数 U 和 V 便共有 $N_1 + N_2 + 2$ 个独立的矩阵泛函参数. 条件 (2) 对 U、V 共给出 $N_1 + N_2 + 1$ 个方程. 这种方程系统正是我们要研究的可积系统. (对 KdV 情形来说, $Q = V$, $U = \Lambda$, 而这两个矩阵都是 λ 的多项式,参看第二章(1.16),(1.21)). 如果 U 和 V 有简单极点:

$$U = U_0 + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{U_n}{\lambda - a_n}, \qquad V = V_0 + \sum_{n=1}^{N_2} \frac{V_n}{\lambda - b_n}, \tag{3}$$

则我们得到

$$U_{0t} - V_{0x} + [U_0, V_0] = 0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} U_{nt} + [U_n, R_n] = 0, \\ V_{nx} + [V_n, T_n] = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

式中

$$R_n = V_0 + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{V_m}{a_n - b_m}, \qquad T_n = U_0 + \sum_{m=1}^{N_1} \frac{U_m}{b_n - a_m}.$$

在(3)—(5) 中, $a_n = a_n(x)$ 和 $b_n = b_n(t)$ 是 x 和 t 的已知

函数.

系统(2)的不确定性用它的"规范不变性"(*gauge invariance*)来解释. 假设 U、V 是系统(2)的某一个解,而 φ 是系统(1)的相应解. 让我们研究下面函数:

$$\widetilde{U} = gUg^{-1} + g_x g^{1}; \qquad \widetilde{V} = gVg^{-1} + g_t g^{-1}, \tag{6}$$

式中 g 是任意非退化矩阵. 很容易验证, $\widetilde{U}$ 和 $\widetilde{V}$ 仍满足方程(2). 而相应系统(1)的解为 $\tilde{\varphi} = g\varphi$. 我们将把这种变换 $U, V \to \widetilde{U}, \widetilde{V}$ 叫做规范变换. 相应于(4)、(5)我们有

$$\widetilde{U}_0 = gU_0g^{-1} + g_x g^{-1}, \qquad \widetilde{V}_0 = gV_0g^{-1} + g_t g^{-1}, \tag{7}$$

$$\widetilde{U}_n = gU_ng^{-1}, \qquad \widetilde{V}_n = gV_ng^{-1}. \tag{8}$$

对 U、V 加上一个附加条件之后便可确定系统(2). (例如,可以假定 $U_0 \equiv 0$, 这时在精确到差规范变换范围内,可以认为 $V_0 = 0$). 而借助于先加上任意另外一个条件所确定的方程的解同这种情形的区别只是具有某一矩阵 g 的变换. 我们将把所有这类方程称作规范等价的. 还要注意到, 所有这类方程存在一个自然平凡解: $U = A(x, \lambda)$, $V = B(t, \lambda)$, $[A(x, \lambda), B(t, \lambda)] = 0$. 我们用 ω 来表示方程(1)的相应解. 在以前所研究的方程情形中, $U = J\lambda + [J, Q]$, $V = I\lambda + [I, Q]$, 这时这种解为 $\omega = e^{i\lambda(Jx+It)}$.

现在让我们证明,一旦系统(1)、(2)有一个解,例如, A, B, ω, 就可以构造这种系统的与泛函参数有关的新解.

假设 Γ 是在复变量 λ 平面上的闭的或通向无穷远处的迴路. 让我们在所有 x 和 t 的情形下研究下面正则黎曼问题:

$$\psi_1(x,t,\lambda)\psi_2(x,t,\lambda) = \varphi_0(x,t,\lambda)G(\lambda)\varphi_0^{-1}(x,t,\lambda), \tag{9}$$

式中 φ_0 是系统(1)的某一个解(为简单起见,可以认为 $\varphi_0 = \omega$). 同时可以出现下面情形: 迴路 Γ 通过函数 U, V 的极点. 在这些极点上我们应假定 $G = 1$. 这使得我们能够对(9)求关于 x 和 t 的微商. 求关于 x 的微商之后,我们得到

$$\psi_{1x}\psi_2 + \psi_1\psi_{2x} = A\psi_1\psi_2 - \psi_1\psi_2 A. \tag{10}$$

我们用下面公式来确定矩阵函数 U:

$$U = -\psi_1^{-1}(\psi_{1x} - A\psi_1) = (\psi_{2x} + \psi_2 A)\psi_2^{-1}. \tag{11}$$

从公式(11)得到，U 从迴路 Γ 延拓到整个复平面上，从而在整个复平面上 U 是有理函数，并且 U 的极点同 A 的极点相同. 从(11)得到:

$$\psi_{1x} = A\psi_1 - \psi_1 U, \qquad \psi_{2x} = U\psi_2 - \psi_2 A. \tag{12}$$

类似地，我们对 t 微商确定出函数 V:

$$V = -\psi_1^{-1}(\psi_{1t} - B\psi_1) = (\psi_{2t} + \psi_2 B)\psi_2^{-1}. \tag{13}$$

函数 V 的极点同 B 的极点相同. 假定 $\psi_1 = \omega\varphi_1^{-1}$, $\psi_2 = \varphi_2\omega^{-1}$, 我们证得，$\varphi_1$, φ_2 满足方程(1). 这样一来，这些方程都是相容的，从而函数 U，V 满足系统(2). 不过到目前为止，黎曼问题的归一化还是任意的. 让我们来研究同从前归一化不同的黎曼问题的新解 $\tilde{\psi}_1 = \psi_1 g^{-1}$, $\tilde{\psi}_2 = g\psi_2$, 其中 g 为 x 和 t 的任意非退化矩阵函数. 很容易验证，这时函数 U 和 V 受到规范变换(6). 由于这个缘故，才产生了用选取黎曼问题归一化的方法来确定系统(2). 在函数 U, V 中的极点之一处的单位归一化起着特殊作用. 例如，在 n 波问题中，当 $\lambda = \infty$ 时，矩阵 U, V 有唯一的极点，因此，黎曼问题在无穷远处曾用单位矩阵来归一化. 在上面系统(5)这种例子中，也曾用同样方法来归一化，即 $\psi_1(\infty) = 1$; 但对这种情形，点 $\lambda = \infty$ 不是 U 和 V 的极点.

可以把上面所论述的构造系统(2)的解的程序叫做用具有迴路 Γ 和函数 $G(\lambda)$ 的黎曼问题来给裸解 A, B "穿衣服". 下面当 U 和 V 只存在简单极点时，让我们在系统(4)和(5)这种例子中来实现"穿衣服"的显式公式:

$$U_0 = -g_0^{-1}g_{0x},$$
$$V_0 = -g_0^{-1}g_{0t}, \tag{14}$$

$$U_n = g_n A_n g_n^{-1}, \qquad V_n = \tilde{g}_n B_n \tilde{g}_n^{-1}.$$

式中 $g_0 = \phi_1(\infty)$，而矩阵 g_n 和 $\tilde{g}_n$ 乃是在点 $\lambda = a_n$ 和 $\lambda = b_n$ 处的函数 ϕ_1^{-1} 或者 ϕ_2（这取决于相应点是在迴路外部还是在迴路内部)之值. 让我们提醒一下，如果 a_n 或者 b_n 是在迴路上，那么在这种点处 $G = 1$ 以及 $\phi_1^{-1} = \phi_2$. 公式(14)表明，在"穿衣服"时，矩阵 U_n 和 V_n 的不变式保持不变.

在(14)中曾假定，$g_n \neq 1$, $\tilde{g}_n \neq 1$，即假定黎曼问题不论在哪一个极点处都不能用单位 1 来归一化. 如果 $\phi_1|_{\lambda=a_n} = 1$，那么 $U_n = A_n$，但是，对 U_0 的公式有变化. 也就是说，假设 $\phi_1 \simeq 1 + (\lambda - a_n)Q$，那么很明显，$U_0 = [A_n, Q]$ 便同(3.2)完全一致. 还要注意到，上面所论述的全部程序都能以平凡的形式照搬到变量 x、t 的其中一个或二者都是复的情形. 同样可看到，上面所论述的积分程序对于 x 和 t 是定域的，例如，在适当选取 Γ 和 G 的情况下，当 $x \to \pm\infty$ 时，可使得解 $U(x, t)$ 以指数形式迅速增大.

为了构造孤子解，必须研究具有零点的黎曼问题. 和从前一样，我们给出与 x 和 t 无关的零点 λ_n 和 μ_n 的集合，并在每一个零点处给出子空间:

$$N_n = \mathrm{Im}\phi_1|_{\lambda=\lambda_n}, \qquad M_n = \ker\phi_2|_{\lambda=\mu_n}. \tag{15}$$

一般来说，这时在确定 U 和 V 的公式(11)、(13)中，在点 λ_n、μ_n 处会有附加极点. 因此，必须得要求在这些附加极点处的留数等于零. 让我们来定义下面微分算子:

$$D_x^{(n)} = \partial_x - A|_{\lambda=\lambda_n}, \qquad \widetilde{D}_x^{(n)} = \partial_x - A|_{\lambda=\mu_n},$$
$$D_t^{(n)} = \partial_t - B|_{\lambda=\lambda_n}, \qquad \widetilde{D}_t^{(n)} = \partial_t - B|_{\lambda=\mu_n}.$$

从(11)、(13)得到

$$\begin{aligned} C_n D_x^{(n)} F_n = 0, \qquad C_n D_t^{(n)} F_n = 0, \\ \widetilde{C}_n \widetilde{D}_x^{(n)} \widetilde{F}_n = 0, \qquad \widetilde{C}_n \widetilde{D}_t^{(n)} \widetilde{F}_n = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

式中 C_n 是 ϕ_1^{-1} 在点 $\lambda = \lambda_n$ 处的留数，而 F_n 是 ϕ_1 在此点的

值；$\tilde{C}_n$ 是 ψ_2^{-1} 在点 $\lambda=\mu_n$ 处的留数，$\tilde{F}_n$ 是 ψ_2 在此点的值。

从公式(16)得到，子空间 M_n 相对于算子 $\tilde{D}_x^{(n)}$、$\tilde{D}_t^{(n)}$ 的作用是不变的，而子空间 N_n 相对 $D_x^{(n)}$、$D_t^{(n)}$ 的作用是不变的. 显然，当且仅当 $M_n^{(0)}$ 和 $N_n^{(0)}$ 与 x 和 t 无关时，下面子空间才具有不变性质：

$$\begin{aligned} M_n(x,t) &= \omega(x,t,\mu_n)M_n^{(0)}, \\ N_n(x,t) &= \omega(x,t,\lambda_n)N_n^{(0)}. \end{aligned} \tag{17}$$

公式(17)是公式(3.42)的推广.

如果 $G=1$，则可以按照与 n 波问题同样的图象来构造一般系统(2)的孤子解.

下面我们还得谈一下系统(1)的简化问题. 当然，任何一种简化的可能性，在很大程度上取决于 U、V 的极点分布以及裸解 A、B 的具体形式. 尽管如此，仍可作出几点普遍鉴戒. 例如，很明显，系统(1)的 U 和 V 可以从所有复矩阵的代数缩小到能允许用复数乘法运算的它的任何一个子代数. 如果矩阵 U 和 V 的全部极点都在实轴上，则可认为 U 和 V 属于任何一个那样的子代数，例如，可以把 U、V 取作反厄米矩阵. 在一般情形下，可以认为

$$U^* = CUC, \quad C^2=1, \quad C^+=C,$$
$$[AC]=[BC]=0.$$

同在 §3 中作法一样，黎曼问题会从简化得到一些结果.

还要注意到，系统(2)作为一个简单特殊情形，它包含所有那些允许用 L-A 对形式的 Lax 表象的可积系统. 当系统(1)的第一个方程所含的函数 U 存在唯一简单极点、而第二个方程的函数 V 存在任意阶极点时，就是这种系统. 不失一般性，可以认为这个极点是在点 $\lambda=\infty$ 处，同时 V 为 λ 的多项式.

当 U 存在唯一的简单极点而 V 的极点分布为任意的情形

时，就其复杂程度存在以下情况：即在这种情形中，系统(2)同样允许 L-A 对形式，但算子 A 已经是积分算子，从而它的计算是非平凡的；至于算子 L，它同(3.1)产生的算子相比仅仅差一个规范变换．因为就方法的应用来说，构造算子 L 和 A 其中之一的散射正问题和逆问题的理论都是充分的，所以这类系统的理论同在 §3—§5 中所论述的理论不同之处只是一些无关紧要的细节（另外的时间动力学和另外的黎曼问题归一化），从而可以很容易地用同样完备的程序来构造这类系统的理论．

§7. 相对论不变系统——手征场

1. 二维时空中的相对论不变的可积系统*)

值得注意的是，在方程(6.2)中间存在广泛一类描述相对论不变的二维经典场论模型的方程．其中最简单例子是在第一章中讨论过的 sin-Gordon 方程．代替方程(6.1)，让我们研究方程

$$i\psi_\xi = U\psi, \qquad i\psi_\eta = V\psi \tag{1}$$

以及它们的相容条件

$$U_\eta - V_\xi = i[U, V], \tag{2}$$

式中 $\xi = \frac{1}{2}(t + x)$，$\eta = \frac{1}{2}(t - x)$ 为时空中的“光锥”变量，而 U、V 和从前一样，是具有极点 a_n、b_n 的 λ 的有理函数．

下面让我们来讨论关于所研究的系统的相对论不变性问题． 如果假定，在洛伦兹变换下，U、V 同向量分量一样变换，那么系统(2)显然关于特殊洛伦兹群是不变的．实际上，在具有参数 γ 的变换中，我们有 $\xi \to \gamma\xi$，$\eta \to \gamma\eta$，为了保持

*) 在本节中，其中“1—5”这些小标题是译者根据书后参考文献[58]加的．——译注

不变性，只须假定 $U\to\gamma^{-1}U$，$V\to\gamma V$. 在坐标 x 的反射下，我们有变换 $\xi\longleftrightarrow\eta$. 所以，为了保持在全洛伦兹群下的不变性，只须要求存在分立对合（包含有 λ 平面的分式——线性变换），在这种对合下实现交换 $U\to V$，$V\to U$.

现在让我们来研究关于全洛伦兹群不变系统的具体例子：

$$U=U_0+\sum_{n=1}^{N}\frac{U_n}{\lambda-a_n},\qquad V=V_0+\sum_{n=1}^{N}\frac{V_n}{\lambda+a_n},\tag{3}$$

于是

$$\begin{gathered}iV_{n\xi}=[\Phi_n,V_n],\qquad iU_{n\eta}=[\Omega_n,U_n],\\ \Phi_n=\sum_k\frac{U_k}{a_n+a_k}-U_0,\qquad \Omega_n=\sum_k\frac{V_k}{a_n+a_k}+V_0.\end{gathered}\tag{4}$$

其中，$a_i+a_j\neq0$（对任意 i, j）.

当极点可以是多重的并且 Φ_n 和 Ω_n 的分母允许有零点的情形时，写出(4)这种类型系统并不难.

还要注意到，可以把(1)中的矩阵 ϕ 取作某种矩阵群 G 的元素. 于是，U 和 V 便是相应的李代数元素；显然，方程(2)没有超出李代数的范围. 我们将研究系统(4)的最简单情形，也即矩阵 U 和 V 各自都有一个简单极点. 而且这种极点的位置又都和 x、t 无关. 不失一般性，可以假定

$$U=U_0+\frac{U_1}{\lambda+1},\qquad V=V_0+\frac{V_1}{\lambda-1}.\tag{5}$$

方程(4)这种系统这时便具有下面形式：

$$U_{0\eta}-V_{0\xi}-i[U_0,V_0]=0,\tag{6}$$

$$U_{1\eta}-i\left[U_1,V_0-\frac{1}{2}V_1\right]=0,\tag{7a}$$

$$V_{1\xi}+i\left[U_0+\frac{1}{2}U_1,V_1\right]=0.\tag{7b}$$

系统 (6) 和 (7) 的不同规范都是我们感兴趣的. 假定 $U_0 = V_0 = 0$ 得到下面方程组:

$$A_\eta = \frac{i}{2}[A, B], \qquad B_\xi = -\frac{i}{2}[A, B], \tag{8}$$

式中 $A = U_1$, $B = -V_1$.

方程(8)是下面方程组的相容条件:

$$i\psi_\xi = \frac{A}{\lambda+1}\psi, \qquad i\psi_\eta = -\frac{B}{\lambda-1}\psi. \tag{9}$$

另外一个规范在于矩阵 U_1 的对角化. 在(5)中我们假定 $U_1 = A_0(\xi)$. 于是方程 (7a) 是显然可解的. 让我们假定 $U_0 = -A_0/2 + C$, $\Gamma = V_1 = 2(V_0 - S)$, $(\lambda-1)/(\lambda+1) = z$; 式中 S 是某一对角矩阵.

于是系统(1)变成下面形式:

$$i\psi_\xi + C\psi + \frac{1}{2}zA_0\psi = 0,$$

$$i\psi_\eta + S\psi + \frac{1}{2z}\Gamma\psi = 0,$$

而方程(6)变成下面形式:

$$i(C_\eta - C_\xi) = \frac{1}{4}[A_0,\Gamma] - [S,C].$$

假定 $C = C_\perp + C_{/\!/}$, 式中 $C_{/\!/}$ 是对角矩阵,让我们注意到

$$C_{/\!/\eta} - S_\xi = 0, \qquad \text{即 } C_{/\!/} = R_\xi, \qquad S = R_\eta.$$

最后,系统(6)—(8)变成下面形式:

$$\begin{aligned} iC_{\perp\eta} &= \frac{1}{4}[A_0, \Gamma] - [R_\eta, C_\perp], \\ i\Gamma_\xi &= -[C_\perp + R_\xi, \Gamma]. \end{aligned} \tag{10}$$

方程组 (10) (U-V 系统) 在特殊情况下简化为 sin-Gordon 方程.

2. 主手征场

方程 (8) 同具有几何意义的经典场论模型之一——主手

征场有联系．假设在平面 (ξ,η) 的每一个点上都给定一个李群 G 的元素 $g(\xi,\eta)$，并且还假设复矩阵群的一个子群作为群 G 的实现．让我们来研究拉格朗日密度：

$$L=\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\left(\frac{\partial g}{\partial\xi}\frac{\partial g^{-1}}{\partial\eta}\right). \tag{11}$$

值得注意的是表达式(11)在 G 中有双边不变形式．的确，用常数矩阵 $h\in G$ 作左平移 $(g\to hg)$，然后在(11)中进行循环置换，可证实 L 的不变性．同样很明显，拉格朗日 L 相对右平移 $g\to gh$ 也是不变的．拉格朗日对应的运动方程为

$$g_{\xi\eta}=\frac{1}{2}(g_\xi g^{-1}g_\eta+g_\eta g^{-1}g_\xi). \tag{12}$$

方程(12)称作群 G 的主手征场方程．可以使(12)变成另一种形式．为此我们引入场 A 和 B，它们属于群 G 的李代数之元素：

$$A=ig_\xi g^{-1},\qquad B=ig_\eta g^{-1}. \tag{13}$$

显然，存在下面关系式：

$$A_\eta-B_\xi=i[A,B]. \tag{14}$$

从(12)同样得到很容易检验的关系式：

$$A_\eta+B_\xi=0. \tag{15}$$

方程组(14)，(15)显然等价于系统(8)．可以把量 A 和 B 解释为流，此流是由于拉格朗日密度相对于群位移的对称性所生成的，而方程(15)可以解释为这些流的守恒律．

采用变量(13)，拉格朗日密度(11)有下面形式：

$$L=\frac{1}{2}\mathrm{Sp}AB, \tag{16}$$

而方程(15)成为考虑到约束(14)的相应的拉格朗日方程．

让我们显示求解方程(15)．我们得到

$$A=\Phi_\xi,\qquad B=-\Phi_\eta.$$

于是，方程(14)变成下面形式：

$$\Phi_{\xi\eta} + \frac{i}{2}[\Phi_\xi, \Phi_\eta] = 0. \qquad (17)$$

此方程可以从下面拉格朗日密度得到：

$$L = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\Phi_\xi\Phi_\eta + \frac{i}{3}\mathrm{Sp}(\Phi[\Phi_\xi, \Phi_\eta]). \qquad (18)$$

当方程(8)采用二阶厄米矩阵形式时，在存在下面附加条件下：

$$\mathrm{Sp}A = \mathrm{Sp}B = 0, \qquad \mathrm{Sp}A^2 = \mathrm{Sp}B^2 = 1$$

它描述处在均匀无质量标量场中的相对论弦在四维时空中的运动.

一般来说，在任意 n 次幂情况下，从(8)得到

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\mathrm{Sp}A^n = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\xi}\mathrm{Sp}B^n = 0 \qquad (19)$$

从(8)同样得到，矩阵 A 的约当标准形 A_0 与 η 无关，而矩阵 B 的约当标准形 B_0 与 ξ 无关. 因此 $A_0 = A_0(\xi)$，$B_0 = B_0(\eta)$. 我们把 A 和 B 表示成下面形式：

$$A = f_1 A_0 f_1^{-1}, \qquad B = f_2 B_0 f_2^{-1},$$

从而证实了下面事实：对矩阵 f_1、f_2 的确定精确到右乘任意的且分别同 A_0、B_0 对易的矩阵 f_1^0、f_2^0 的范围内.

下面假设 $G = SU(N)$. 于是矩阵 A 和 B 是厄米的，其中 $\mathrm{Sp}A = \mathrm{Sp}B = 0$，这时 A_0 和 B_0 是对角矩阵，而矩阵 f_1 和 f_2 可以选择为 $SU(N)$ 群的元素. 如果这时矩阵 A 和 B 的本征值相异，那么对矩阵 f_1、f_2 的确定便只精确到乘上任意么正对角矩阵的范围内. 这样一来，可以认为矩阵 f_1 和 f_2 被定义在流形 M 中，其中流形 M 是由 $SU(N)$ 群按对角矩阵的子群 H 进行因式分解时产生的，这也就是说，可以认为 f_1 和 f_2 被定义在"旗空间"(пространство флагов) $SU(N)/H$ 中. 当 A_0 和

B_0固定时，矩阵A和B在此空间也有定义．如果A和B的本征值中间有相重的，那么相应的流形M（“退化的旗空间”）将有较低的维数．

现在让我们把系统（17）从光锥变量ξ，η变到物理变量$x_0 = t = \eta + \xi$，$x_1 = x = \eta - \xi$上，然后我们来计算能量-动量张量：

$$T^{\mu\nu} = \mathrm{Sp}\left(\Phi^{\mu} \frac{\partial L}{\partial \Phi_{\nu}}\right) - g^{\mu\nu} L;$$

结果我们得到

$$\begin{aligned} T^{00} &= T^{11} = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\Phi_t^2 + \Phi_x^2) = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}(\Phi_\eta^2 + \Phi_\xi^2), \\ T^{01} &= T^{10} = \mathrm{Sp}\Phi_t\Phi_x = \mathrm{Sp}(\Phi_\eta^2 - \Phi_\xi^2). \end{aligned} \tag{20}$$

由此得到系统的哈密顿量表达式：

$$\begin{aligned} H &= \int T^{00} dx = \frac{1}{2}\int \mathrm{Sp}(\Phi_t^2 + \Phi_x^2) dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{Sp}(A_0^2(\xi) + B_0^2(\eta))\, dx\,. \end{aligned} \tag{21}$$

从(21)可看到，系统(17)的哈密顿量是同A和B的具体形式无关的量．当减去常数部分时，哈密顿量变为零．对系统(12)以及系统(14)和(15)也可以直接得到类似的结果（哈密顿量等于零）．

为了避开同哈密顿量等于零有关的困难，例如，能量的正则定义的困难，就必须固定矩阵A和B并在流形M_0中引入坐标来解约束(19)．但这时又产生新的困难——需证明所得到的方程是拉格朗日方程，也即所得到的方程是从某一最小作用原理得到的．下面我们指出，对$G = SU(2)$看如何来克服这一困难．为简单起见，我们假定

$$\frac{1}{2}\mathrm{Sp}A^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}B^2 = 1 \tag{22}$$

并借助包利矩阵将 A 和 B 展开：

$$A = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{A}, \qquad B = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}$$

向量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有单位长度. 我们引入 $\cos\alpha = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ 并计算导数 $\boldsymbol{A}_\xi$ 和 $\boldsymbol{B}_\eta$：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_\xi &= \{\boldsymbol{A} \times (a_1\boldsymbol{B} + a_2(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}))\}, \\ \boldsymbol{B}_\eta &= \{\boldsymbol{B} \times (b_1\boldsymbol{A} + b_2(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}))\}, \end{aligned} \tag{23}$$

式中 a_1, a_2, b_1, b_2 皆为数值函数. 算出

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}), \qquad \frac{\partial}{\partial \eta}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}),$$ 我们求出

$$a_2 = \alpha_\xi / \sin\alpha, \qquad b_2 = \alpha_\eta / \sin\alpha. \tag{24}$$

我们还得引入

$$\begin{aligned} a_1 &= U / \sin\alpha, \qquad b_1 = V / \sin\alpha, \\ U &= \boldsymbol{A}_\xi \cdot \boldsymbol{B}_\xi / \sin\alpha, \qquad V = \boldsymbol{A}_\eta \cdot \boldsymbol{B}_\eta / \sin\alpha. \end{aligned} \tag{25}$$

对 α, U, V 微商并利用(23)—(25)，我们得到下面方程组：

$$\alpha_{\xi\eta} + \sin\alpha + UV / \sin\alpha = 0, \tag{26}$$

$$U_\eta = \alpha_\xi V / \sin\alpha, \tag{27}$$

$$V_\xi = \alpha_\eta U / \sin\alpha. \tag{28}$$

从(27)、(28)得到

$$\partial_\eta\left(U\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) + \partial_\xi\left(V\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) = 0,$$

所以

$$\beta_\xi = U\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \qquad \beta_\eta = -V\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

量 α, β 满足方程

$$\beta_{\xi\eta} + \frac{1}{\sin\alpha}(\alpha_\eta\beta_\xi + \alpha_\xi\beta_\eta) = 0, \tag{29}$$

$$\alpha_{\xi\eta} + \sin\alpha - \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}\beta_\xi\beta_\eta = 0. \tag{30}$$

方程(29),(30)是拉格朗日方程,它们的拉格朗日密度为

$$L=\frac{1}{2}\alpha_\xi\alpha_\eta+\frac{1}{2}\beta_\xi\beta_\eta\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1+\cos\alpha. \qquad (31)$$

能量-动量张量分量这时有下面形式:

$$T^{00}=\frac{1}{2}\partial^\mu\alpha\partial^\mu\alpha+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\partial^\mu\beta\partial^\mu\beta-\cos\alpha+1, \qquad (32)$$

$$T^{01}=\partial^0\alpha\partial^1\alpha+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\partial^0\beta\partial^1\beta. \qquad (33)$$

对于场 α 和 β 的能量-动量向量也可以用原始场 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 来表示:

$$E=\int dx\left\{\frac{(\boldsymbol{AB})_\eta^2+(\boldsymbol{AB})_\xi^2+(\boldsymbol{A}_\eta\boldsymbol{B}_\eta)^2+(\boldsymbol{A}_\xi\boldsymbol{B}_\xi)^2}{4[1-(\boldsymbol{AB})^2]}\right.$$
$$\left.+1-(\boldsymbol{AB})\right\}, \qquad (34)$$

$$P=\int dx\,\frac{(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})_\eta^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})_\xi^2+(\boldsymbol{A}_\eta\cdot\boldsymbol{B}_\eta)^2-(\boldsymbol{A}_\xi\cdot\boldsymbol{B}_\xi)^2}{4[1-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2]}. \qquad (35)$$

在我们所研究的情形中

$$A_0=B_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$

在更一般的情形中, $A_0=a(\xi)\sigma_3$, $B_0=b(\eta)\sigma_3$. 但,假定

$$\begin{aligned}A(\eta,\xi)&=a(\xi)\widetilde{A}(\tilde{\eta},\tilde{\xi}),\\ B(\eta,\xi)&=b(\eta)\widetilde{B}(\tilde{\eta},\tilde{\xi}),\end{aligned} \qquad (36)$$

式中 $\tilde{\eta}=\int b(\eta)d\eta$, $\tilde{\xi}=\int a(\xi)d\xi$, 在变量 $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\tilde{\eta}$, $\tilde{\xi}$ 中又回到上面所研究的情形. 让我们提醒一下,仅当函数 $a(\xi)$ 和 $b(\xi)$ 没有零点时,变量代换(36)才是相互单值的.

下面我们将指出, 把上面所提出的解约束的程序推广到 $SU(N)$ 群的情形, 并指出这种程序实质上是从原始系统(8)过渡到系统(10). 实际上, 在推导系统(10)时还作了部分积

分，引入任意对角矩阵 R. 让我们把系统(10)化成一个二阶方程，为此让我们注意到，矩阵 Γ 可以表示成下面形式：

$$\Gamma = \varphi B_0 \varphi^*, \qquad \varphi = f_1 f_2^*.$$

矩阵 φ 是么正的并属于"旗空间" $SU(N)/H$. 从方程(10)得到

$$[i\varphi^+ \varphi_\xi + \varphi^+ C_\perp \varphi,\ B_0] = 0,$$

或者

$$R_\xi + C_\perp = -i\varphi_\xi \varphi^* + \varphi W \varphi^*,$$

式中 W 是同 B_0 对易的某一对角矩阵，它的矩阵元为 $W_{ik} = \delta_{ik} W_i$.

量 W_i 可以从矩阵 $C_\perp$ 的对角元等于零的条件求出.

要注意到，对矩阵 φ 的确定只精确到乘上对角矩阵 $e^{iL}(L_{ik} = {}_i\delta_{ik})$ 的范围内. 在这种变换下产生下面代换：

$$W \to W + L_\xi. \tag{37}$$

在 $SU(2)$ 群的情况下，假定

$$\varphi = \begin{bmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} e^{-i\omega} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} e^{i\omega} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}, \quad R_\eta = R_\xi = 0, \tag{38}$$

对 α 和 β 可得到系统(29),(30).

在一般情形中，假定 $L_\xi = -W$, $R = 0$, 可以得到

$$W = 0. \tag{39}$$

相应的系统

$$\partial_\eta(\varphi_\xi \varphi^*) + \frac{1}{4}[\varphi B_0 \varphi^*, A_0] = 0. \tag{40}$$

当 $B_0 = A_0$ 时，对 $SU(3)$ 群情形可以化成拉格朗日形式. 我们还要注意到，虽然系统(40)是在正交矩阵群中确定，但这种系统同正交群的主手征场根本不同. 实际上，$SU(N)$ 群的实的旗空间是由全体正交矩阵群组成的，所以正交群的旗空间

显然有较低的维数. 特别是，在 $SO(2)$ 群中的方程 (40) 是 sin-Gordon 方程，而 $SO(2)$ 群的主手征场由于它的对易性却用线性方程来描述.

3. 手征场和简化问题

我们所构造的系统乃是含有很多相互作用场的方程组. 在 $SU(N)$ 群的 n 个极点情形中，一般系统(4)含有 $nN(N-1)/2$ 个复数场. 但在这些数目中仅仅头几个值会在场论中得到应用. 所以减少相互作用场的数目问题也即简化问题具有很大意义. 特别值得注意的是，对主手征场的简化还具有明显的几何意义. 下面让我们来研究群 G 的主手征场（今后我们将假定 $G=SU(N)$ 或者 $SO(N)$)，并假定这种场满足下面附加条件:

$$g^2=1. \tag{41}$$

我们将证明，此条件同具有下面形式的主手征场方程相容:

$$g_{\xi\eta}=\frac{1}{2}(g_\xi g g_\eta+g_\eta g g_\xi). \tag{42}$$

我们对(41)求关于 ξ 和 η 的微商得到

$$g_{\xi\eta}g+gg_{\xi\eta}+g_\xi g_\eta+g_\eta g_\xi=0. \tag{43}$$

我们将 (42) 代入到 (43) 并利用从 (41) 得到的以下关系式: $g_\xi g=-gg_\xi$, $g_\eta g=-gg_\eta$. 这时我们便证实恒满足(43)，从而方程(42)和条件(41)的相容性得到证明. 特别值得注意的是，条件(41)具有几何意义. 让我们把 g 表示成下面形式:

$$g=1-2P, \tag{44}$$

于是，从(41)得到 $P^2=P$，即 P 是投影算子，它作用在群 G 的伴随表示空间中. 条件(41)在作为黎曼空间的群 G 中分离出某一子空间 $\tilde{G}$. 子空间 $\tilde{G}$ 不是连通的. 每一个投影算子 P_k 由它自己的象(也即此投影算子所投射到的空间)的维数 k 来

表征．显然，在演化过程中，数 k 不可能改变，所以可以认为 $g=1-2P_k$.

设群 G 的伴随表示空间的维数等于 N. 群 G 的元素 g 同样也可表示为 $g=-1+2P'$，其中 $P'=1-P$，为 P 的余投影算子．所以，不失一般性，可以认为 $k\leqslant[N/2]$. 因此，方程(43)乃是下面方程的集合：

$$[P_{k\xi_\eta}, P_k]=0,\ k=1,2,\cdots,[N/2] \tag{45}$$

(符号 $[a]$ 表示数 a 的整数部分)．作用的相应表达式有下面形式：

$$S_k=\frac{1}{2}\int \mathrm{Sp}(P_{k\eta}, P_{k\xi})d\eta d\xi. \tag{46}$$

(45)的每一个方程都是在 k 维投影空间中给出的手征场．对实的情形，这种空间称作实的 Grassmann 流形 $\Gamma^R_{N,k}$，而对复的情形，称作复的 Grassmann 流形 $\Gamma^C_{N,k}$. Grassmann流形乃是 $SO(N)$ 群和 $SU(N)$ 群的齐性空间(homogeneous space)，从而这种流形是这两个群按低维子群进行因子分解的结果：

$$\Gamma^R_{N,k}=\frac{SO(N)}{O(k)SO(N-k)};\quad \Gamma^C_{N,k}=\frac{SU(N)}{U(k)SU(N-k)}. \tag{47}$$

因此这种 Grassmann 流形乃是在 N 维实的或复的空间中的 k 维超平面集合，而 $SO(N)$ 群或 $SU(N)$ 群作为转动群超作用在这种流形上．对 $k=1$ 这一特殊情形，Grassmann 流形称作 N 维投影(实的或复的)空间并用 RP^N 和 CP^N 来表示．在这种情形下，投影算子 P_1 可写成下面形式

$$(P_1)_{ik}=n_i\bar{n}_k,\qquad \sum_{i=1}^N \bar{n}_i n_i=(nn)=1. \tag{48}$$

把(48)代入到作用(46)，我们得到

$$S_1=\int[(n_\xi n_\eta)+(n_\eta n_\xi)+2(nn_\xi)(nn_\eta)]d\xi d\eta. \tag{49}$$

在实的情形中，相应的运动方程为

$$n_{\xi\eta}+(n_\xi n_\eta)n=0, \tag{50}$$

而在复的情形中，相应的运动方程为

$$n_{\xi\eta}+\frac{1}{2}[(n_\xi n_\eta)+(n_\eta n_\xi)+(n_{\xi\eta}n)-(nn_{\xi\eta})]n$$
$$-(nn_\xi)n_\eta-(nn_\eta)n_\xi+2(nn_\eta)(nn_\xi)n=0. \tag{51}$$

对实的情形来说，关系式(48)中的向量 n 的确定仅精确到正负号范围内，这也就是说，实投影空间的手征场仅仅对应方程(50)这样一些解，即对这些解来说，向量 n 仅仅限于在球面 S^{N-1} 中的一个半球面内运动. 如果取消这一限制，方程(50)仍有意义. 在这种情形中，方程(50)是整个球面 S^{N-1} 的 n 场方程. 对 RP^{N-1} 和球面 S^{N-1} 的手征场方程之间的局部一致可用下面事实来解释：投影空间 RP^{N-1} 是球面 S^{N-1} 关于离散群 Z_2 作因子分解的结果.

实球面和复球面同样分别是 $SO(N)$ 群和 $SU(N)$ 群的齐性空间，它们是这两个群分别按子群 $SO(N-1)$ 和 $SU(N-1)$ 作因子分解的结果. 实球面和复球面都是更为普遍的齐性子空间——Stiefel 流形 $\sigma^R_{N,k}$ 和 $\sigma^C_{N,k}$ 的具体例子. Stiefel 流形 $\sigma^R_{N,k}$ 和 $\sigma^C_{N,k}$ 乃是实的或复的 N 维空间中的 k 维正交归一标架：

$$\sigma^R_{N,k}=\frac{SO(N)}{SO(N-k)},\quad \sigma^C_{N,k}=\frac{SU(N)}{SU(N-k)}.$$

在 Stiefel 流形中，自然出现手征场，并且可把这些手征场解释为 k 个正交 n 场系统. 这些场的作用和方程有下面形式：

$$S=\frac{1}{2}\int\sum_{\alpha=1}^{k}[(n^\alpha_\eta n^\alpha_\xi)+(n^\alpha_\xi n^\alpha_\eta)]d\xi d\eta,$$

$$n^\beta_{\xi\eta}+\sum_{\alpha=1}^{k}[(n^\alpha_\eta n^\beta_\xi)+(n^\alpha_\xi n^\beta_\eta)]n^\alpha=0,$$

$$(n^\alpha n^\beta)=\delta^{\alpha\beta}.$$

我们注意到，在复的情形中，甚至连 $k=1$ 的情形(复的 n 场)我们所得到的方程也同(51)不同。这是因为 CP^N 不同于复的 $(2N+1)$ 维球面按连续群 $U(1)$ 的因子分解.

Grassmann 流形和 Stiefel 流形二者的手征场都是具有几何意义的自然场论模型. 上面我们已经证明过，Grassmann 流形的手征场方程是主手征场的简化. 下面我们将要利用这一事实来证明,Grassmann 流形的场的可积性. 不过对 Stiefel 流形的手征场，除了能化简为实球面的 Grassmann 流形情形之外，迄今还没有证明简化和可积性这些事实. 但可以提出一个简化和可积性都存在的假说. 可以用更普遍的形式来叙述这一假说，即很可能存在下面情况: $SO(N)$ 群和 $SU(N)$ 群的所有齐性空间的手征场都是可积的，而所有相应的方程都是由于主手征场方程的简化得到的; 并且主手征场方程的全部简化也很可能只限于这种形式.

4. 孤子解

下面让我们用 §6 中所论述的图象将逆问题方法引用到主手征场中来. 这时应注意到，由于主手征场方程允许积分形式的 L-A 对(矩阵 U 和 V 存在单独的简单极点),所以主手征场理论完全同 n 波问题的理论相似. 下面我们只简明扼要写出在 $SU(N)$ 群中主手征场的孤子解.

在点 $\lambda=\lambda_0$ 处具有按 λ 的一个极点的孤子解(用矩阵 g 的语言)有下面形式:

$$g=\left(1+\frac{\lambda_0-\bar{\lambda}_0}{\bar{\lambda}_0}P\right)\psi_0|_{\lambda=0}, \tag{52}$$

式中 $\psi_0(\lambda, \xi, \eta)$ 是当 $U=A_0$, $V=B_0$ 时为裸方程 (1)的解:

$$\psi_0(\lambda, \xi, \eta)=\exp\left\{\frac{i}{\lambda+1}\int_{-\infty}^{\xi}A_0(\xi')d\xi'-\right.$$

$$-\frac{i}{\lambda-1}\int_{-\infty}^{\eta} B_0(\eta')d\eta'\Big\}. \tag{53}$$

按下面子空间来构造投影算子 P:

$$M=\phi_0|_{\lambda=\lambda_0}M_0, \qquad N=\phi_0|_{\lambda=\bar{\lambda}_0}N_0,$$

$$M=\mathrm{Im}P, \qquad N=\ker P.$$

并且这种投影算子是厄米的 ($P^*=P$), 所以空间M和N, 以及 M_0 和 N_0 彼此都是正交互余的. 因此只须给出其中一个子空间,例如 M_0 便可. 设这个子空间用向量 $\alpha_i^{(p)}(p=1,\cdots r)$ 撑成; r 是空间 M_0 的维数. 设 $A_0=\mathrm{diag}a_i(\xi)$, $B_0=\mathrm{diag}b_i(\eta)$. 于是对组成$M$基底的向量 m_j^p 来说, 我们有下面形式:

$$m_j^p=a_j^p\exp\Big\{\frac{i}{\lambda_0+1}\int_{-\infty}^{\xi}a_j(\xi')d\xi'$$

$$-\frac{i}{\lambda_0-1}\int_{-\infty}^{\eta}b_j(\eta')d\eta'\Big\}. \tag{54}$$

对 $\eta=1$ 这种最简单情形,

$$P_{\alpha\beta}=\frac{m_\alpha\widetilde{m}_\beta}{\sum|m_r|^2}.$$

在 $SU(2)$ 群情形中,孤子解依赖于两个复参数 ($\lambda_0=\lambda_0'+i\lambda_0''$, c_2/c_1) 并且是原来意义上的孤子,也即, 当 A_0, B_0 为常数时, 这种孤子解乃是具有下面恒定速度的孤立波:

$$V=\frac{(b_1-b_2)|1+\lambda_0|^2-(a_1-a_2)|1-\lambda_0|^2}{(b_1-b_2)|1+\lambda_0|^2+(a_1-a_2)|1-\lambda_0|^2}.$$

根据公式(34)和(35)可以算出孤子的能量和动量, 从而可得到孤子质量的表达式:

$$M^2=\frac{4\lambda_0''(a_1-a_2)(b_1-b_2)}{|1-\lambda_0^2|^2}. \tag{55}$$

孤子的矩阵 P_{ij} 有下面形式:

$$P = \frac{\lambda}{2\text{ch}y}\begin{bmatrix} e^{y} & e^{-is} \\ e^{is} & e^{-y} \end{bmatrix}, \tag{56}$$

式中

$$y = \lambda_0''\alpha_0(x - vt - x_0), \qquad \bar{x}_0 = -\frac{1}{\lambda_0''\alpha_0}\ln\left|\frac{c_1}{c_2}\right|,$$

$$S = (\lambda_0'\alpha_1 + \alpha_0)t - (\lambda_0'\alpha_0 + \alpha_1)x + \arg\frac{c_1}{c_2}; \tag{57}$$

$$\alpha_0 = \frac{a_1 - a_2}{|\lambda_0 + 1|^2} + \frac{b_1 - b_2}{|\lambda_0 - 1|^2},$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1 - a_2}{|\lambda_0 + 1|^2} - \frac{b_1 - b_2}{|\lambda_0 - 1|^2}.$$

当 $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) > 0$ 时，孤子是通常的粒子，而当 $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) < 0$ 时，孤子是快子 (tachyon). 对于 $SU(N)$ 群情形，如果 $N > 2$，则孤子之间存在非平凡相互作用. 设 $N = 3$，于是，正象三波问题一样，除数 λ_0 之外，还得用完整向量 (c_1, c_2, c_3) 来表征孤子解. 如果此向量的一个分量等于零，那么我们得到简单的孤子解，在这种情形中，显然存在三种类型的孤子. 头两种类型的孤子是当 $c_1 = 0$ 和 $c_3 = 0$ 时的单元孤子，而第三种类型的孤子是当 $c_2 = 0$ 时的复合孤子.

从质量公式(55)可得到，在标准孤子的情形中，当 $a_1 > a_2 > a_3$, $b_1 > b_2 > b_3$ 时，复合孤子质量的平方大于两个单元孤子质量的平方之和: $(a_1 - a_3)(b_1 - b_3) > (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) + (a_2 - a_3)(b_2 - b_3)$. 因此，复合孤子衰变成两个单元孤子是可能的. 一般情形(所有三个 $c_i \neq 0$) 的孤子解，实际上描述了这种衰变. 从分析一般解(5.8),(5.9)可以很容易得到，当 $t \to -\infty$ 时，

$$P_{12} \to 0, \qquad P_{23} \to 0,$$

$$|P_{13}| \to \frac{1}{2\operatorname{ch}\left(\lambda_0''\alpha_0^{13}x - \lambda_0''\alpha_1^{13}t + \ln\left|\frac{c_1}{c_3}\right|\right)},$$

而当 $t \to +\infty$ 时，

$$P_{13} \to 0,$$

$$|P_{12}| \to \frac{1}{2\operatorname{ch}\left(\lambda_0''\alpha_0^{12}x - \lambda_0''\alpha_1^{12}t + \ln\left|\frac{c_1}{c_2}\right|\right)},$$

$$|P_{13}| \to \frac{1}{2\operatorname{ch}\left(\lambda_0''\alpha_0^{23}x - \lambda_0''\alpha_1^{23}t + \ln\left|\frac{c_2}{c_3}\right|\right)}.$$

（根据公式（57），用 i，j 代替指标 1，2 来计算量 $\alpha_{0,1}^{ij}$）由此可见，数 c_2/c_1 和 c_3/c_1 表征衰变产物的最终坐标．因方程(2)相对时间符号改变是可逆的，所以存在两个单元孤子聚变为复合孤子的逆过程．这些过程可从这样的孤子解中找到，即在这种孤子解中，余投影算子 $1-P$ 的象乃是一维子空间．

5．Grassmann 流形手征场的积分

现在让我们来研究场的积分程序，其中这些场是由于简化而产生的．下面我们仅限于在本节 3 中所研究的 $SU(N)$ 群主手征场的简化，$g^2=1$ 的情形，在这种情形中引导出复Grassmann 流形手征场．为了实现积分，必须阐明这种简化怎样反映在黎曼问题的数据上，也就是说，从这种简化出发，对矩阵 A_0、B_0、$G(\lambda)$ 和函数 ϕ_1、ϕ_2 的零点分布以及子空间 N_i、M_i 的结构应加上什么样的限制．首先让我们注意到，从公式(13)及条件 $g^2=1$ 得到下面关系式：

$$Ag+gA=0, \qquad Bg+gB=0, \tag{58}$$

考虑到 $g=1-2P$，还得到下面关系式：

$$A=-2i[P,P_\xi], \qquad B=-2i[P,P_\eta]. \tag{59}$$

从关系式(5.8)及基本公式 (1) 得到，可以选取解的这样的基本矩阵 φ，它满足下面条件：

$$\varphi(1/\lambda) = g\varphi(\lambda), \qquad g = \varphi(0). \tag{60}$$

换句话说，函数 φ 的零点就单位圆的反演意义上讲是成对称分布的，并且分成简单零点(当 $|\lambda| = 1$ 时)和双重零点．这一事实在 sin-Gordon 方程理论中早已知道(参看第一章)．相应产生简单和双重孤子解．因公式

$$\varphi_0(1/\lambda) = g_0\varphi_0(\lambda), \tag{61}$$

(式中 $g_0 = \psi(0)$) 对所给定的系统 (1) 的原始解(黎曼问题的解)也成立，所以函数 ψ_1, ψ_2 满足对合：

$$\begin{aligned} \psi_1(1/\lambda) &= g\psi_1(\lambda)g_0, \\ \psi_2(1/\lambda) &= g_0\psi_2(\lambda)g, \end{aligned} \tag{62}$$

由此得到

$$\begin{aligned} G(1/\lambda) &= g_0G(\lambda)g_0, \\ G_0(1/\lambda) &= g_0G(\lambda). \end{aligned} \tag{63}$$

(63)的第二个公式乃是“穿衣服”矩阵 $G_0(\lambda)$ 具有的条件．

从公式(57)得到下面关系式：

$$\begin{aligned} PA + AP &= A, \qquad P_0A_0 + A_0P_0 = A_0, \\ PB + BP &= B, \qquad P_0B_0 + B_0P_0 = B_0. \end{aligned} \tag{64}$$

(式中 P_0 是裸投影算子，$g_1 = 1 - 2P_0$)，而从(62)得到裸投影算子 P_0 的“穿衣服”公式：

$$P = f_1P_0f_1^{-1}, \qquad f_1 = \psi_1|_{\lambda=1}.$$

所以对问题的整个解来说，还必须确立 P_0 和 A_0 的具体形式．回忆 A_0, B_0 为对角矩阵，从公式(64)我们有

$$\begin{aligned} P_{0ik}(a_i + a_k) &= \delta_{ik}a_k, \\ P_{0ik}(b_i + b_k) &= \delta_{ik}b_k. \end{aligned} \tag{65}$$

让我们把数 a_i 的平方以递减次序排列起来． 把矩阵 A^2 的对角线分成具有相等本征值平方的若干块．对这些块的每一块

内部都将负的本征值排在正的本征值之后．从(65)得到，矩阵 P_0 拥有分块对角形式，并且在每一块中，矩阵 P_0 简化为矩阵 P_0^k，其中 P_0^k 有下面形式：

$$P_0^k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & R_k \\ R_k^+ & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_k R_k^+ = R_k^+ R_k = 1, \qquad (66)$$

式中 R_k 是么正矩阵．

从公式(64)很容易确立，在上面所描述的关于数 a_i 的排列次序下，同 A_0 对易的矩阵 B_0 也应分解成同 A_0 结构相一致的对角矩阵．最后，矩阵 A_0 和 B_0 的第 k 块可用函数 $a_k(\xi)$，$b_k(\eta)$ 来表征．把(66)代入到(57)，我们得到矩阵 R_k 的表达式：

$$R_k = R_k^0 \exp\left(i\int_{-\infty}^{\xi} a_k d\xi' + i\int_{-\infty}^{\eta} b_k(\eta) d\eta' \right). \qquad (67)$$

式中 R_k^0 为任意常数么正矩阵．投影算子 P_0 象的一般维数由矩阵 P_0^k 的总秩数来确定．

公式(66)，(67)解决了关于 Grassmann 流形手征场的渐近状态的结构问题．构造有关这些场解的进一步图象同在 §6 和本节 4 所论述的没有什么区别．还要注意到，在复投影空间手征场的最简单情形中，矩阵 A_0 和 B_0 总共可只含有一个非平凡块，所以这里的渐近状态用一对函数 a，b 来表征．从本节 4 的结果得到，在这种情形中，孤子没有非平凡相互作用．可以把这里所论述的全部理论照搬到实 Grassmann 流形手征场和实球面 n 场中去．还要注意到，从上面整个论述很明显得到，对球面 n 场的孤子来说，不管它们的维数是多少，都没有非平凡相互作用．

第四章　大时间情况下的渐近解

前几章发展的逆问题形式体系，使我们能够描述许多类可积方程的精确解.对衰减快的情况,这就是N个孤子解,也即在大时间情况下,这种解可分解成N个单孤子解的迭加形式.本章目的是描述 $t\to\infty$时解的渐近行为,在颇大程度上,这种解对应于任意初始条件．利用逆问题方法，使我们能象线性系统那样的详尽地研究解的渐近形式，即，使我们能用属于 $t=0$ 时刻的初始数据得到渐近形式的显示公式．因此我们可以恰如其分地说,渐近公式最明显地表明,逆问题方法是卓有成效的.

首先让我们讨论一下,我们想要得到的最终结果．为此，我们先研究在线性问题中存在的情况．采用适当变量，所有保守线性方程的解可表示成傅里叶积分形式:

$$f(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(k)e^{-i\omega(k)t+ikx}dk,$$

式中 $\omega(k)$ 为波的色散律，而 $g(k)$ 是初始条件的傅里叶变换:

$$g(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,0)e^{-ikx}dx.$$

如果考虑的系统是色散系统，即对几乎所有 k 来说，$\omega''(k)\neq0$，那么当 $t\to\infty$时,解 $f(x,t)$ 集中在 $x/t=v=O(1)$ 的区域内．的确,我们假定 $x=vt$，并用稳定相方法计算积分得到

$$f(x,t)=\text{const}\cdot t^{-1/2}g(k(v))\exp\{i[k(v)v-\omega(k(v))]t\},$$

式中 $k(v)$ 为方程 $\omega'(k)=v$ 的根(为简单起见,我们认为此根是唯一的). 这个公式和用初始数据来表示出 $g(k)$ 的公式一起完全地(并显示地)解出了渐近式问题. 下面我们将竭力设法得到这种类型的公式.

应当指出，确定非线性色散系统的渐近解的结构并没有吸取逆问题方法. 一旦我们碰到非一维方程，我们就期待当 $t\to\infty$时,渐近式将有纯线性特点(当然，如果渐近式中没有孤子的话). 在一维问题中,由于解的振幅衰减得慢，渐近值的形式就显得复杂一点. 的确,如果解的振幅衰减同 $t^{-1/2}$ 成比例(和所有线性问题一样),那么,一般来讲，波的频率的非线性位移为振幅的平方，从而同 t^{-1} 成比例; 这应导致出现与 $\ln t$ 成比例的附加位相. 例如，就非线性薛定谔方程来说，

$$i\psi_t+\psi_{xx}\pm2|\psi|^2\psi=0$$

渐近式应有下面形式:

$$\psi(x,t)=t^{-1/2}f\left(\frac{x}{t}\right)\exp\left[i\frac{x^2}{4t}\pm2i\left|f\left(\frac{x}{t}\right)\right|^2\ln t\right]+O(t^{-3/2}).$$

(直接代入便可验证这种假定的正确性). 因而我们的问题在于确定复值函数 $f(\xi)$ 同初始条件 $\psi(x,t)|_{t=0}$ 之间的联系. 有点出乎意料的情况是，确定这种函数的模和幅角是不同程度的复杂问题.本章第一节解决其中的第一个问题;而第二节专用来解决第二个问题. 并将第一节所得到的结果应用到非线性介质中的 Fraunhofer 衍射问题中去. 在这些节内，我们基本上研究相空间无孤子部分. 但在渐近式中考虑到孤子并不复杂,因此我们没有专门研究这类问题.

§1. 积分关系式. 非线性弗朗和费衍射

让我们研究非线性薛定谔方程:

$$ir_t + r_{xx} + 2|r|^2 r = 0. \tag{1}$$

在无孤子情形中，逆问题方程(1.9.11)简化为下面形式：

$$\begin{aligned}
-\bar{\phi}_2(x,\lambda)e^{i\lambda x} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda')\phi_1(x,\lambda')e^{i\lambda' x}}{\lambda'-\lambda+i0}d\lambda', \\
\bar{\phi}_1(x,\lambda)e^{i\lambda x} &= 1+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda')\phi_2(x,\lambda')e^{i\lambda' x}}{\lambda'-\lambda-i0}d\lambda'
\end{aligned} \tag{2}$$

同时 $r(\lambda,t)=r(\lambda,0)e^{4i\lambda^2 t}$. 让我们来研究当 $t\to\infty$ 时方程(2)的解. 函数 $\phi_{1,2}$ 是本征值问题(1.9.1)的解:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi_1}{\partial x} &= i\lambda\phi_1 + i\bar{r}(x,t)\phi_2, \\
\frac{\partial\phi_2}{\partial x} &= -i\lambda\phi_2 + ir(x,t)\phi_1,
\end{aligned} \tag{3}$$

其中当 $x\to\infty$ 时其渐近式为 $\phi_1=e^{i\lambda x}$, $\phi_2=0$. 当 t 很大时，我们期望 $r(x,t)$ 将处处接近于零. 基于这种理由，ϕ_1, ϕ_2 应同指数函数差别不大. 所以我们将寻求系统(2)具有下面形式的解:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= A(\lambda,x,t)e^{i\lambda x}, \\
\phi_2 &= \bar{B}(\lambda,x,t)e^{-i\lambda x-4i\lambda^2 t},
\end{aligned} \tag{4}$$

式中 A 和 B 同指数函数相比为 x 和 t 的慢变函数. 将(4)代入(2)我们得到

$$\begin{aligned}
Be^{2i\lambda x+4i\lambda^2 t} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda')A(\lambda')e^{2i\lambda' x+4i\lambda'^2 t}}{\lambda'-\lambda+i0}d\lambda', \\
\bar{A} &= 1+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{r(\lambda')\bar{B}(\lambda')}{\lambda'-\lambda+i0}d\lambda'.
\end{aligned} \tag{5}$$

现在假定 $x=vt$, 并利用广义函数理论的熟知关系式:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{i\Phi(\lambda')t}}{\lambda'-\lambda+i0}=\begin{cases}-2\pi i e^{i\Phi(\lambda)t}\delta(\lambda'-\lambda), & \Phi'(\lambda)<0,\\ 0, & \Phi'(\lambda)>0,\end{cases}$$

从(5)中的第一个方程求出

$$B(\lambda)=r(\lambda)A(\lambda)\theta(-v/4-\lambda), \tag{6}$$

式中

$$\theta(\xi)=\begin{cases}1, & \xi>0,\\ 0, & \xi<0,\end{cases}$$

进一步令：$r(\lambda)\theta(-v/4-\lambda)=R(\lambda,v)$. 考虑到(6)，将(5)的第二个方程改写成下面形式：

$$\bar{A}(\lambda,v)=1+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|R(\lambda',v)|^2\bar{A}(\lambda',v)}{\lambda'-\lambda+i0}d\lambda'. \tag{7}$$

现在让我们提醒一下，事实上，我们熟知此方程的解. 其实，当 $v=-\infty$ 时，函数 $R(\lambda,v)=r(\lambda)=b(\lambda)/a(\lambda)$，而 $A(\lambda,v)=a(\lambda)$；再考虑到 $a(\lambda)$ 在上半平面的解析性质以及关系式 $|a(\lambda)|^2+|b(\lambda)|^2=1$，显然，我们满足了方程(7). 所以，方程(7)的解 $A(\lambda)$ 乃是上半平面的解析函数，它在那里没有零点(让我们回忆到，我们是研究无孤子情形)并且在无穷远处它趋于1；而当 λ 为实数时，显然 $A(\lambda)$ 的模等于：

$$|A(\lambda)|=\begin{cases}|a(\lambda)|, & \lambda<-v/4,\\ 1, & \lambda>-v/4.\end{cases} \tag{8}$$

$|A(\lambda)|$ 的这种结构，能把公式(7)中的被积表达式改写成下面形式：$[A^{-1}(\lambda')-\bar{A}(\lambda')](\lambda'-\lambda+i0)^{-1}$. 根据函数 $A(\lambda)$ 的上述一系列性质，我们能直接反求出它，这是因为我们已经知道 $|A(\lambda)|$，而它的幅角由色散关系式给出：

$$\arg A(\lambda)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-v/4}\frac{\ln|a(\lambda')|}{\lambda'-\lambda}d\lambda'. \tag{9}$$

公式(4)，(6)，(8)和(9)确定出 $\psi_1(\lambda)$ 和 $\psi_2(\lambda)$. 除了在 $v=-4\lambda$ 附近的狭窄 $(\sim t^{-1/2})$ 区域之外，所求的解对所有 $v=x/t$ 都成立. 从公式(1.9.13)的第二个公式(原因很清楚，我们没有理由用第一个公式)，使我们得到积分：

$$\int_{vt}^{\infty}|r(x,t)|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|R(\lambda)|^2\overline{A}(\lambda)d\lambda.$$

此等式右边的积分，由函数 $A(\lambda)$ 在无穷远处的留数确定；最后我们有

$$\lim_{t\to\infty}\int_{vt}^{\infty}|r(x,t)|^2dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-v/4}\ln\frac{1}{|a(\lambda)|^2}d\lambda. \tag{10}$$

公式(10)使我们能对第一章 §10 中所引入的非线性薛定谔方程的角变量的作用给出物理解释．这就是说，连续谱的作用型变量 $n(\lambda)$（参看(1.10.25)）乃是渐近状态的"填充数"．除此之外，当 t 很大时，(10)表示为

$$|r(x,t)|^2=\frac{1}{4\pi t}\ln\frac{1}{|a(-x/4t)|^2}. \tag{11}$$

公式(10)，(11)存在一个非常有意义的物理应用．方程(1)可化成下面形式：

$$2ik\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{\partial^2E}{\partial x^2}=-k^2\frac{\delta n_{NL}}{n_0}|E|^2E, \tag{12}$$

这时它描述稳定电磁波在非线性介质中的行为．假定，折射指数对场的依赖关系有下面形式：$n=n_0+\delta n_{NL}|E|^2$（立方非线性）．(12)中量 E 的意义为电场的复包络，波矢量 k 沿 z 轴方向，而方程(12)左边的第二项是考虑到波的衍射弥散量．现在让我们来研究非线性介质中的夫琅和费衍射问题，也即关于波在带有缝隙的屏上(并且屏的后面放有非线性介质)的衍射问题．假设屏放在 $z=0$ 的平面上；我们将认为屏平面上的波场是给定的并且等于常数，为简单起见，还假设屏上总共只有一个宽度为 L 的缝隙．在这种情形下，方程(12)的初始条件便有下面形式：

$$E(x)|_{z=0}=\begin{cases}0, & x<0,\quad x>L,\\ E_0, & 0<x<L.\end{cases} \tag{13}$$

假定 $r = k\sqrt{\delta n_{NL}/2n_0}\, E$，$t = z/2k$，则我们就有关于 $r(x, t)$ 的方程(1)．对形如(13)的初始条件来说，其散射数据 $a(\lambda)$，$b(\lambda)$ 很容易算出；这样，

$$\frac{1}{|a(\lambda)|^2} = \frac{\lambda^2 + |r_0|^2}{\lambda^2 + |r_0|^2 \cos^2 \chi L},$$

式中

$$\chi(\lambda) = (\lambda^2 + |r_0|^2)^{1/2}, \qquad |r_0|^2 = \frac{k^2 \delta n_{NL}}{2n_0} |E_0|^2.$$

因为 $t = z/2k$，所以，实际上我们使用公式(10)得到对大于 $\mathrm{arctg}(v/2k)$ 角度的衍射辐射的积分强度．其次，由于方程(12)仅仅适用于研究对小角度的衍射，所以需假定 $\theta \ll 1$，这样我们便得到衍射到角度间隔从 θ 到 $\theta + d\theta$ 内的辐射强度的简单表达式：

$$dI(\theta) = \frac{k}{\pi\chi} \ln \frac{1}{|a(-k\theta/2)|^2} d\theta,$$

式中 $\chi = k^2 \delta n_{NL}/n_0$．这样一来，在对缝隙衍射情形下

$$\frac{dI}{d\theta} = \frac{k}{\pi\chi} \ln \frac{k^2\theta^2/4 + |r_0|^2}{k^2\theta^2/4 + |r_0| \cos^2[L\,(k^2\theta^2/4 + |r_0|^2)^{1/2}]}. \qquad (14)$$

当初始条件(13)不包含孤子时，也即当 $a(\lambda)$ 在上半平面没有零点时，此公式才成立．当入射到缝隙上波的积分强度 $I = |E_0|^2 L$ 等于

$$I_{CR} = \frac{\pi^2}{2L} \frac{n_0}{\delta n_{NL} k^2}$$

时，则 $a(\lambda)$ 出现第一个零点；这样以来，当 $I < I_{CR}$ 时，公式(14)才成立．

对于在具有任意平行缝隙组之屏上的有关衍射问题来说，也可以得到强度按方向分布的显示表达式，这是因为具有非重叠载波的诸有限势的迭加所形成的势，其散射矩阵等于

单独对每一个有限势的诸散射矩阵之积.

§2. 渐近式的显示公式(非线性薛定谔方程)

在前一节,我们曾用初始数据的语言得到了 $t\to\infty$ 时,$r(x,t)$ 之振幅的显示表达式,但关于解的形式,实际上并没作任何假定.我们曾阐明了,$r(x,t)$ 在任何一条 $x=vt$ 的直线上,按同 $t^{-1/2}$ 成比例地规律衰减,由此可见,$r(x,t)$ 的渐近式具有本章引言中所描述的振动特点.本节一开始我们就假定,$r(x,t)$ 恰好有这种结构,然后我们将计算这种类型势的散射矩阵的显式形式;把以这种方式所得到的表达式加以反演,我们便能求出这样的势,它对应于按 λ 振动快的反射系数(因为 $r(\lambda,t)=r(\lambda,0)e^{4i\lambda^2 t}$,所以当 t 很大时,函数 $r(\lambda)$ 的确振动得很快).在最后结果中,我们将能给出 $r(x,t)$ 之渐近式的显式公式,从而可证明一开始的假定是正确的.

让我们把方程组(1.3)改写成下面形式:

$$i\frac{\partial v_1}{\partial x}+Ae^{-i\hat{\Phi}}v_2=0,\qquad i\frac{\partial v_2}{\partial x}+Ae^{i\hat{\Phi}}v_1=0,\tag{1}$$

式中我们曾引入表示

$$r=Ae^{i\Phi}(\operatorname{Im}A=0,\ A\geqslant 0),\qquad \tilde{\Phi}=\Phi+2\lambda x,$$

$$v_1=\psi_1 e^{-i\lambda x},\quad v_2=\psi_2 e^{i\lambda x}.$$

我们假定,$r(x,t)$ 的模和幅角满足以下条件:

$$\Phi_{xx}>0,\left|\frac{d}{dx}\ln A\right|^2\ll\Phi_{xx},\qquad\left|\frac{d}{dx}\ln\Phi_{xx}\right|^2\ll\Phi_{xx},\tag{2}$$

以及积分 $\int\frac{A^2}{\Phi_x}dx$ 在正负无穷远处的邻域内收敛.条件(2)意味着,根据系统(1.3),函数 $r(x,t)$ 可以在任何一点的邻域内表示成振幅为常数、频率变化为线性的指数函数.对每一个

λ，我们划分出一个共振区域，点 $x_0(\lambda)$ 的邻域，其中点 $x_0(\lambda)$ 由下面条件确定：

$$\tilde{\Phi}_x(x_0) = \Phi_x(x_0) + 2\lambda = 0.$$

又因 $\Phi_{xx} > 0$，因此对每一个 λ，此方程只存在一个解．在共振区域内，系统(1)简化为下面形式：

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial v_1}{\partial y} + A(x_0)\exp\left[-i\left(\tilde{\Phi}_0 + \frac{f_0 y^2}{2}\right)\right] v_2 = 0, \\ & i\frac{\partial v_2}{\partial y} + A(x_0)\exp\left[i\left(\tilde{\Phi} + \frac{f_0 y^2}{2}\right)\right] v_1 = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

式中 $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{\Phi}(x_0)$，$f_0 = \Phi_{xx}(x_0)$，$y = x - x_0$.

远离 x_0 点，系统(1)同样可作重要简化．也即在

$$\tilde{\Phi}_x^2 \gg \Phi_{xx} \tag{4}$$

区域中，对 v_1 和 v_2 我们得到

$$i\tilde{\Phi}_x \frac{\partial v_1}{\partial x} + A^2 v_1 = 0, \qquad -i\tilde{\Phi}_x \frac{\partial v_2}{\partial x} + A^2 v_2 = 0. \tag{5}$$

满足条件 (4) 的区域，我们将称之为渐近区域．在这种区域中，v_1 和 v_2 很容易从(5)求出．同样不难指出，在共振区域中解的一般形式．为此，让我们引入变量 $z = y\Phi_{xx}^{1/2}(x_0)$，并从系统(3)中消去量 v_1．对 v_2 我们得到

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} - iz\frac{\partial v_2}{\partial z} + \alpha^2 v_2 = 0, \tag{6}$$

式中

$$\alpha^2(\lambda) = \frac{A^2(x_0)}{\Phi_{xx}(x_0)}, \qquad x_0 = x_0(\lambda). \tag{7}$$

方程(6)的通解用抛物柱函数来表示(参看 [26], $T.2$)：

$$v_2 = e^{i\frac{z^2}{4}}\left[c_1 D_{-1+i\alpha^2}\left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right) + c_2 D_{-1+i\alpha^2}\left(-\frac{z}{\sqrt{i}}\right)\right]. \tag{8}$$

这时函数 $v_1(y)$ 从(3)的第二个方程求出。这样以来，共振区

域中的解便由两个任意常数 c_1 和 c_2 来确定。

在满足条件(2)的情况下，共振区域和渐近区域应有相互重叠部分. 在重叠区域中，方程(5)和(6)的解应衔接起来，衔接之后，我们便得到问题(1)在整个 x 轴上的解. 其中，对解

$$\xi(x, \lambda) \overset{\text{定义}}{=} \tilde{\phi}(x, \lambda) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \to +\infty.$$

考虑到 $x \to +\infty$*) 的边界条件，我们得到

$$\xi_1(x,\lambda) = 0, \qquad \xi_2(x,\lambda) = \exp\left(i \int_x^{\infty} \frac{A^2}{\tilde{\Phi}_x} dx \right). \tag{9}$$

在重叠区域内，公式(9)给出

$$\xi_1 = 0,$$

$$\xi_2 = [(x - x_0)\Phi_{xx}(x_0)]^{-i\alpha^2} \exp\left(-i \int_{x_0}^{\infty} \ln \tilde{\Phi} \frac{d}{dx} \frac{A^2}{\Phi_{xx}} dx\right). \tag{10}$$

而我们感兴趣的抛物柱函数之渐近式有下面形式 ($z \to +\infty$):

$$D_{-1+i\alpha^2}\left(\frac{z}{\sqrt{i}}\right) = e^{i\frac{z^2}{4}} \, e^{\frac{\pi\alpha^2}{4}} \, z^{i\alpha^2-1} + O(z^{-2}),$$

$$D_{-1+i\alpha^2}\left(-\frac{z}{\sqrt{i}}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1 - i\alpha^2)} e^{-\frac{\pi\alpha^2}{4}} \, z^{-i\alpha^2} e^{-i\frac{z^2}{4}} + e^{-\frac{3}{4}\pi i} e^{-\frac{3}{4}\pi\alpha^2} z^{-1+i\alpha^2} e^{\frac{iz^2}{4}} + \cdots, \tag{11}$$

把这些公式代入到 v_1 和 v_2，并把所得到的表达式同(10)衔接起来，我们求出

$$c_2 = \frac{\Gamma(1 - i\alpha^2)}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\pi\alpha^2}{4}} [\Phi_{xx}(x_0)]^{-i\frac{\alpha^2}{2}}$$

---

*) 原文写成 $t \to -\infty$. ——译注

$$\times \exp\left(-i\int_{x_0}^{\infty} \ln\tilde{\Phi}_x \frac{d}{dx}\frac{A^2}{\Phi_{xx}}dx\right),$$

$$c_1 = c_2 e^{-\pi\alpha^2}.$$

这样一来，我们便找到了共 区域内的解 $\xi(x, \lambda)$. 用类似方法，把方程(5)在 $x < x_0$ 的重叠区域中的解同已找到的解衔接起来，我们便确定出共振点左边的渐近区域中的解。然后令 $x \to -\infty$，并考虑到

$$\bar{a}(\lambda) = \xi_2(x, \lambda)e^{i\lambda x},$$

$$b(\lambda) = -\xi_1(x, \lambda)e^{-i\lambda x}, \qquad x \to -\infty$$

我们得到散射矩阵：

$$\bar{a}(\lambda) = \exp\left[-\pi\alpha^2 + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2(x)}{\tilde{\Phi}_x}dx\right], \tag{12}$$

$$b(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi i}}{\alpha\Gamma(i\alpha^2)} e^{-\frac{\pi\alpha^2}{2}} \exp\{-i[\tilde{\Phi}_0 + L_1 - L_2 + \alpha^2\ln\Phi_{xx}(x_0)]\}, \tag{13}$$

式中

$$L_1 = \int_x^{\infty} \ln\tilde{\Phi}_x \frac{d}{dx}\frac{A^2}{\Phi_{xx}}dx,$$

$$L_2 = \int_{-\infty}^{x} \ln|\tilde{\Phi}_x| \frac{d}{dx}\frac{A^2}{\Phi_{xx}}dx. \tag{14}$$

在公式(12)—(14)中应假定 $x_0 = x_0(\lambda)$，其中 $x_0(\lambda)$ 是从方程 $\Phi_x(x_0) = -2\lambda$ 所找到的解. 于是我们便解出了满足条件(2)这一类势的散射正问题. 不难验证，所得到的散射矩阵拥有一些必要性质. 首先，我们利用下面公式

$$|\Gamma(i\alpha^2)|^2 = \frac{\pi}{\alpha^2 \mathrm{sh}\pi\alpha^2}$$

来证明 $|a(\lambda)|^2 + |b(\lambda)|^2 = 1$. 其次，让我们注意到，公式(12)中的指数函数之指数可改写成下面形式：

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi\alpha^2(\xi)}{\xi-\lambda+i0}d\xi,$$

这种形式意味着，$\ln\bar{a}(\bar{\lambda})$ 可从实轴解析延拓到 λ 的下半平面；这同样意味着，$a(\lambda)$ 在 $\mathrm{Im}\lambda>0$ 区域内是解析的并且在这种区域内没有零点．正象我们知道的那样，这些定理在一般情形中相对散射矩阵都是正确的；对于满足条件 (2)（其中条件(2)是用来计算 $a(\lambda)$，$b(\lambda)$ 的正问题条件）的这类势来说，这里我们已建立了这些定理．由于有公式 (12)—(14)，我们就可以用同样的精确度来解散射的逆问题，按已知的 $a(\lambda)$、$b(\lambda)$ 反求 $A(x)$、$\Phi(x)$．为此，让我们注意

$$\alpha^2(\lambda)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|a(\lambda)|^2}$$

是谱参数 λ 的已知函数．我们用表示 $\arg b(\lambda)=\theta(\lambda)$，并注意到积分 L_1 和 L_2 仅仅用 $\alpha(\lambda)$ 来表示，所以

$$L_1-L_2=\int_{\lambda}^{\infty}\ln|\xi-\lambda|\frac{d}{d\xi}\alpha^2(\xi)d\xi$$
$$-\int_{-\infty}^{\lambda}\ln|\lambda-\xi|\frac{d}{d\xi}\alpha^2(\xi)d\xi,$$

我们假定

$$\tilde{\theta}(\lambda)=\theta(\lambda)+L_1(\lambda)-L_2(\lambda)+\pi/4+\arg\Gamma(i\alpha^2).$$

从(13)得到下面关系式:

$$\tilde{\theta}(\lambda)=-2\lambda x-\Phi(x)-\alpha^2\ln\Phi_{xx},\quad \Phi_x=-2\lambda. \tag{15}$$

首先让我们研究当(15)中的项 $\alpha^2\ln\Phi_{xx}$ 可以忽略的情形．于是用勒让德变换求出 $\Phi(x)$

$$x=-\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\lambda},\qquad \Phi(x)=-2\lambda x-\tilde{\theta}(\lambda).$$

然后我们将 $\alpha^2\ln\Phi_{xx}$ 作为修正项来计算，并注意到

$$\Phi_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=-2\frac{\partial\lambda}{\partial x}=-2\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^{-1}=4\tilde{\theta}_{\lambda\lambda}^{-1},$$

所以可以把(15)重写成下面形式:

$$\Phi(x) = -2\lambda x - \tilde{\theta}(\lambda) + \alpha^2 \ln \tilde{\theta}_{\lambda\lambda}, \quad x = -\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\lambda}. \quad (16)$$

由于勒让德变换性质,因而由条件 $\Phi_{xx}>0$ 得到 $\tilde{\theta}_{\lambda\lambda}>0$,反之亦然;条件(2)可重写成下面形式:

$$\left|\frac{d}{dx}\ln\alpha^2(\lambda)\right|^2 \ll \tilde{\theta}_{\lambda\lambda}, \quad \frac{d}{d\lambda}(|\tilde{\theta}_{\lambda\lambda}|)^{1/2} \ll \frac{d}{d\lambda}\tilde{\theta}_{\lambda}. \quad (17)$$

对(17)积分,我们发现,除零点邻域之外,项 $\alpha^2(\lambda)\ln\tilde{\theta}_{\lambda\lambda}$ 同 $\tilde{\theta}$ 相比很小,从而证明上述的讨论是正确的.现在让我们回忆一下,$r(\lambda, t) = r(\lambda, 0)\exp(4i\lambda^2 t)$,即 $\tilde{\theta}(\lambda, t) = \tilde{\theta}_0(\lambda) + 4\lambda^2 t$.当 $t\to\infty$ 时事实证明满足条件(17),显然这一事实与 $a(\lambda)$,$\tilde{\theta}_0(\lambda)$ 的形式无关.这种情况使我们能找到非线性薛定谔方程初始问题的渐近形式

当 $t\to\infty$ 时我们有

$$x = -4\lambda t + x_1(\lambda), \quad x_1(\lambda) = -\frac{1}{2}\frac{\partial\tilde{\theta}_0}{\partial\lambda},$$

$$\lambda = -\frac{x}{4t},$$

即 $\Phi_{xx} = 1/2t$,$\alpha^2(\lambda) = \alpha^2(-x/4t)$.因此,最后我们有

$$A^2(x,t) = \Phi_{xx}\alpha^2\left(-\frac{x}{4t}\right) = \frac{1}{2\pi t}\ln\frac{1}{\left|a\left(-\frac{x}{4t}\right)\right|}, \quad (18)$$

$$\Phi(x,t) = \frac{x^2}{4t} + \alpha^2\left(-\frac{x}{4t}\right)\ln 2t - \tilde{\theta}_0\left(-\frac{x}{4t}\right). \quad (19)$$

公式(18),(19)完全确定出渐近式 $r(x, t) = Ae^{i\Phi}$ 的主项.(在前一节我们已经得到了公式(18).)

在结束这节时,让我们谈几句关于所采用的近似的特点.对于方程(1.1)来说,条件(2) $A_{xx} \ll A\Phi_x^2$ 相当于过渡到"非线性几何光学"近似,或者相当于过渡到具有负压的一维气体动力学方程.在这种术语下,没有孤子的条件意味着选取这样

的初始条件，在这种初始条件下负压效应原则上表现不出来。量 A^2 相当于气体密度，Φ 相当于流体动力学势，Φ_x 相当于速度。$\Phi_{xx} \gg 0$ 意味着，存在具有单调速度剖面的气体飞散，并且渐近状态相当于自型飞散状态。

§3. 渐近式的显式公式（KdV 方程）

现在让我们着手研究下面 KdV 方程解的渐近行为

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

正象在第一章曾确立的那样，下面方程的解

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + u(x,t)\psi = k^2\psi, \tag{1}$$

当 $x \to \infty$ 时，其渐近形式为 $\psi = e^{ikx}$，而当 $x \to -\infty$ 时，渐近形式为

$$\psi = a(k)e^{ikx} + b(k)e^{-8ik^3t}e^{-ikx}. \tag{2}$$

这时 $\psi(k)$ 满足下面方程：

$$\bar\psi(k)e^{ikx} = 1 - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dfrac{\bar b(k')}{a(k')}\, e^{8ik'^3t+ik'x}\psi(k')}{k' - k + i0}\, dk', \tag{3}$$

此方程乃是散射的逆问题方程。

当 t 充分大时，$u(x,t)$ 处处很小（我们仍研究无孤子情况），并且方程(1)的解局部地将同指数函数和区别很小。所以下面也和在 §1 中一样，我们将寻求方程(3)的具有下面形式的解 $\psi(k,x,t)$：

$$\psi(k,x,t) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx-8ik^3t}, \tag{4}$$

式中 A 和 B 同指数函数相比是 x、t 的慢变函数。现在我们把(4)代入到(3)：

$$\bar A + \bar B\exp(2ikx + 8ik^3t) =$$
$$= 1 - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\bar b k')}{a(k')}\,\frac{B(k')dk'}{k' - k + i0} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{b}(k')}{a(k')}\frac{A(k')\exp(2ik'x+8ik'^3t)}{k'-k+i0}dk'. \tag{5}$$

现在使 $b\to\infty$*)，并假定 $x=vt$，$v<0$，并利用 §1 中所描述的技巧，从(4)得到下面两个关系式：

$$\bar{B}(k)=\frac{\bar{b}(k)}{a(k)}A(k)\theta(\xi^2-k^2), \tag{6}$$

$$\bar{A}(k)=1-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{b}(k')}{a(k')}\frac{B(k')}{k'-k+i0}dk', \tag{7}$$

式中引入表示

$$v=-12\xi^2,\qquad 即\ x=-12\xi^2t. \tag{8}$$

也和在 §1 中一样，我们求出方程(6)，(7)下面形式的解：

$$A(\xi,k)=\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(\xi^2-k'^2)\ln|a(k')|}{k'-k-i0}dk'\right\}, \tag{9}$$

$$B(\xi,k)=\theta(\xi^2-k^2)b(k)$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(k'^2-\xi^2)\ln|a(k')|}{k'-k+i0}dk'\right\}. \tag{10}$$

当 ξ^2 不太接近 k^2 时，也即在上面曾称之为渐近区域内时，解(9)，(10)才成立。

下面我们讨论一下，在 $k\sim\xi$ 的邻域内 A，B 的行为。我们假定

$$\xi-k=\lambda,\qquad \lambda\ll k,\qquad k>0. \tag{11}$$

从(9)，(10)我们得到

$$A(\xi,k)=\begin{cases}|a(k)|\lambda^{\frac{1}{\pi i}\ln|a(k)|}e^{i\Phi(k)}, & \lambda>0,\\ |\lambda|^{\frac{1}{\pi i}\ln|a(k)|}e^{i\Phi(k)}, & \lambda<0,\end{cases} \tag{12}$$

$$B(\xi,k)=\theta(\lambda)b(k)\lambda^{-\frac{1}{\pi i}\ln|a(k)|}e^{i\arg a(k)-i\Phi(k)}, \tag{13}$$

---

*) 应是使 $t\to\infty$. ——译注

式中引入表示

$$\Phi(k)=\frac{1}{\pi}\ln|2k|\ln|a(k)|+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-k}^{k}\ln|k'-k|\frac{d}{dk'}\ln|a(k')|dk'. \qquad (14)$$

于是，正象在 §1 中一样，我们确定了问题(1)的几乎处处的解，而实际上关于势 $u(x,t)$ 的行为并没作任何假定．但为确定在共振区域内的 $\psi(k)$，必须作这种假定．利用在引言中所论述的理由，我们将寻求 KdV 方程"准线性"形式的渐近解：

$$u(x,t)=-\frac{1}{2\sqrt{t}}(\varphi(\xi)e^{-i16\xi^3t}t^{i\alpha(\xi)}+c\cdot c), \qquad (15)$$

式中 $\xi^2=-x/12t$ (参看(8))．(15)同"线性 KdV 方程" $u_t+u_{xxx}=0$ 之渐近解的唯一区别在于，(15)中出现了因子 $t^{i\alpha(\xi)}=e^{i\alpha(\xi)\ln t}$，我们已知道，出现这种因子是同频率作了非线性修正使衰减变慢有关．

我们把公式(15)中的 $u(x,t)$ 作为势代入到方程(1)中去，然后把方程(1)中的变量从 x 变到用(6)*) 同 x 相联系的 ξ 中．采用变量 ξ，方程(1)改写成下面形式：

$$\frac{1}{(24t)^2}\frac{1}{\xi^2}\left(\psi_{\xi\xi}-\frac{1}{\xi}\psi_\xi\right)+k^2\psi+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{t}}(\varphi(\xi)t^{i\alpha}e^{-16i\xi^3t}+c\cdot c)\psi=0. \qquad (16)$$

方程(16)的解，在渐近区域内我们已经知道，因此我们感兴趣的仅仅是 ψ 在 $\xi\sim k$ 的直接邻域内的行为，也即，用前节的术语来说，是 ψ 在共振区域的行为．把(4)代入到(16)，并假定在我们感兴趣的区域中，A 和 B 都是 $(\xi-k)t^{1/2}$ 的函数，抛

*) 应是"用(8)"．——译注

掉小项,并用表示 $\lambda=\xi-k$，我们便得到下面方程组:

$$-\frac{i}{6\sqrt{t}}\frac{dA}{d\lambda}+\varphi(k)t^{i\alpha(k)}e^{-24ikt\lambda^2}B=0,$$
$$\frac{i}{6\sqrt{t}}\frac{dB}{d\lambda}+\bar{\varphi}(k)t^{-i\alpha(k)}e^{24ikt\lambda^2}A=0. \tag{17}$$

引入表示:

$$y=(48kt)^{1/2}\lambda,\qquad \theta(k)=\sqrt{\frac{3}{4k}}\varphi(k)t^{i\alpha(k)}, \tag{18}$$

把(17)改写成下面形式:

$$-i\frac{dA}{dy}+\theta(k)e^{-i\frac{y^2}{2}}B=0,$$
$$i\frac{dB}{dy}+\bar{\theta}(k)e^{i\frac{y^2}{2}}A=0. \tag{19}$$

正象我们已经知道的那样，系统(19)的解用抛物柱函数来表示. 从(19)中消去 B，我们得到 A 的方程:

$$\frac{d^2A}{dy^2}+iy\frac{dA}{dy}-\nu A=0, \tag{20}$$

而消去 A，我们得到 B 的方程:

$$\frac{d^2B}{dy^2}-iy\frac{dB}{dy}-\nu B=0, \tag{21}$$

式中 $\nu=|\theta(k)|^2$.

方程(20),(21)的解有下面形式:

$$A=e^{-i\frac{y^2}{4}}[c_1D_{i\nu-1}(\sqrt{i}\,y)+c_2D_{i\nu-1}(-\sqrt{i}\,y)],$$
$$B=e^{i\frac{y^2}{4}}\left[d_1D_{-i\nu-1}\left(\frac{y}{\sqrt{i}}\right)+d_2D_{-i\nu-1}\left(-\frac{y}{\sqrt{i}}\right)\right]. \tag{22}$$

把(22)同表达式(12),(13)衔接起来,从中便可唯一地定出常数 $c_{1,2}$ 和 $d_{1,2}$:

$$c_1=\frac{\Gamma(1-i\nu)}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\pi\nu}{4}}(48kt)^{i\frac{\nu}{2}}e^{i\Phi(k)},$$

$$c_2 = \frac{\Gamma(1 - i\nu)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\pi\nu}{4}} (48kt)^{i\frac{\nu}{2}} e^{i\Phi(k)} |a(k)|,$$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = \frac{\Gamma(1 + i\nu)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\pi\nu}{4}} (48kt)^{-i\frac{\nu}{2}} b(k)$$
$$\times \exp[i\arg a(k) - i\Phi(k)].$$

衔接还确定出值 $\nu(k) = |\theta(k)|^2$:

$$\nu(k) = \frac{1}{\pi} \ln |a(k)|. \tag{23}$$

于是，我们找到了在共振区域内的 $\psi(x, t, k)$. 我们把(22)中的A和B代入到方程(19)中的任何一个，从中求出位相 $\theta(k)$，这种位相即可确定出 $\alpha(k)$ 也可确定位相 $\varphi(k)$. 从而给出:

$$\bar{\theta}(k) = -\frac{1}{\sqrt{i}} \frac{\Gamma(1 + i\nu)}{\sqrt{2\pi}} (48kt)^{-i\nu} \frac{b(k)}{|a(k)|^{1/2}}$$
$$\times \exp[i\arg a(k) - 2i\Phi(k)].$$

很容易验证,此表达式满足(23).

于是,在确定 $u(x, t)$ 的渐近形式公式(15)中,应令

$$\alpha(\xi) = \frac{1}{\pi} \ln |a(\xi)|,$$

$$\varphi(\xi) = -\sqrt{\frac{2\xi}{3\pi}} \frac{\bar{b}(\xi)}{|a(\xi)|^{1/2}} \Gamma(1 - i\nu(\xi))(48\xi)^{i\nu(\xi)}$$
$$\times \exp[-i\arg a(\xi) + 2i\Phi(\xi) + \pi i/4],$$

式中 $\nu(\xi)$ 用表达式(23)来确定,而 $\Phi(\xi)$ 由(14)给出. 从而完全确定出 $u(x, t)$ 之渐近形式的主项.

§ 4. Whitham 平均法

到目前为止,我们曾研究了 KdV 方程的相应问题的解,在这种问题中,初始时刻的扰动随 x 的增加衰减得十分快,即

$$u \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

特别是，我们确定了这种"定域"初始扰动在 $t \to \infty$ 的极限中所分解成的孤子之振幅和数目.

但是，还存在另外一种类型问题. 例如，十分感兴趣的问题乃是相应于无碰撞情形中的普通流体动力学的激波. 同 Сагуеев 曾指出过的一样[13a]，这种无碰撞激波具有振荡特点. 但是，迄今还没能给出此问题的定量答案. 实际上，事先应很清楚，当 $t \to \infty$ 时，所有定域扰动都逐渐地向各个方向散开，这一点类似于在普通流体动力学中由于粘滞性而造成这种扰动的衰减. 定域扰动 u 按振动周期的平均值随时间发展而趋于零. 为了借助于 KdV 方程来研究"激波阵面"的结构，必须研究这样一些问题，即对所有 t，当 $|x| \to \infty$ 时，这些问题中的扰动都保持相应的边界条件. 换句话说，在普通流体动力学中，这些问题相当于存在这样一个激波，即这种激波的强度不随时间发展而减弱.

这里我们将阐述其中两个这类问题的解[5]. 我们研究的第一个问题是，初始时刻的量 u 在点 $x = 0$ 处受到有限的跃变. 在流体动力学中，这种情形会形成恒定强度的激波. 我们研究的第二个问题是，研究简单波剖面的"翻转"点附近的情况. (此问题的确切提法将在下面给出.)在流体动力学中，继此点之后便形成激波，这种激波的强度随时间发展而增大.

在这两种情形中，解的定性图象有相同的特点. 在任何 $t \gg 1$ 的情况下，都存在振动占据的有限空间区域. 在距此区域的右边和左边，解是光滑的. 没有形成一定宽度的激波阵面. 产生的振动区域随时间自型加宽. 这种区域仅限于弱间断，同时在这种无碰撞激波的前阵面中，这种弱间断还带有奇异性的特点.[1)]

---

1) 应注意到，之所以存在奇异性，乃是这里所利用的近似方法的结果，因为在 KdV 方程的精确解中并不存在奇异性.

我们将构造 t 很大时的解，这时振荡区域的长度远大于振荡波的特征长度. 在这种情形中，自然可利用行之有效的 Whitham 准经典方法[15]. 在 $t\to\infty$ 的极限下，用这种方法所得到的解将是渐近精确的.

为了简化本节的公式起见，我们将对前几章利用的表示作几点改变. 例如现在我们将 KdV 方程写成下面形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, \tag{1}$$

即消去了因子 6，这一点利用平凡的标度变换总是可以作得到的.

另外方程 (1) 的稳定行波解现在我们将不用维尔斯特拉斯椭圆函数 $\wp$ 来表示，而是用与之相联系的雅可比椭圆函数 $dn(y, s)$ 来表示. 于是，这种解将有下面形式:

$$u(x, t)=\frac{2a}{s^2}dn^2\left[\left(\frac{a}{bs^2}\right)^{1/2}(x-Vt), s\right]+\gamma, \tag{2}$$

式中 s 为雅可比函数的模，$0\leqslant s\leqslant 1$. 参数 a, s 和 γ 是任意常数，其中 a 确定振动的振幅:

$$2a=u_{\max}-u_{\min}.$$

波的速度 V 等于

$$V=2a\frac{2-s^2}{3s^2}+\gamma. \tag{3}$$

根据椭圆函数的性质，同波长 λ 用通常的关系式——$k=2\pi/\lambda$ 相联系的波矢量，现在等于

$$k=\frac{\pi}{K(s)}\left(\frac{a}{6s^2}\right)^{1/2}. \tag{4}$$

很容易验证，振动量 u 按周期的平均值等于

$$\bar{u}=\gamma+\frac{2aE(s)}{s^2K(s)}, \tag{5}$$

式中K和E分别相应于第一类和第二类全椭圆积分.

现在让我们来研究稍微不稳定的(准稳定的)波. 按以往用公式(2)来描述它们. 但,现在参数a,s和γ(因而V,k和u)是x和t的慢变函数. 把(2)式代入到(1),并按振动周期进行平均,便可得到平均量的方程. Whitham 曾推出过这些方程[15]. 为了使这些方程写起来方便,引入三个新函数,用下面关系式将它们同a,s和γ联系起来:

$$a = r_2 - r_1, \quad s^2 = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_1}, \quad \gamma = r_2 + r_1 - r_3. \tag{6}$$

同时

$$r_3 \geqslant r_2 \geqslant r_1. \tag{7}$$

关于r_α方程有下面形式:

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial r_\alpha}{\partial x} = 0, \qquad \alpha = 1, 2, 3. \tag{8}$$

(在此公式中不对α求和!下面各式也是如此.)

三个"群速度"v_α等于

$$v_1 = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} - \frac{2}{3}(r_2 - r_1)\frac{K(s)}{K(s) - E(s)},$$

$$v_2 = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} - \frac{2}{3}(r_2 - r_1)\frac{(1 - s^2)K(s)}{E(s) - (1 - s^2)K(s)},$$

$$v_3 = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} + \frac{2}{3}(r_3 - r_1)\frac{(1 - s^2)K(s)}{E(s)}, \tag{9}$$

$$v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3.$$

同时要注意到,速度V,以及关于波的量u之最大值和最小值,可通过r_α用下面方式来表示:

$$V = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3),$$

$$u_{\max} = r_3 + r_2 - r_1, \qquad u_{\min} = r_3 + r_1 - r_2.$$

KdV 方程(1)相对下面变换

$$u \to Cu, \qquad x \to \frac{x}{C^{1/2}}, \qquad t \to \frac{t}{C^{3/2}}, \tag{10}$$

(式中 C 为任意常数)及

$$x \to x + Ct, \qquad u \to u + C, \tag{11}$$

是不变的. 而平均方程(8)还对下面变换不变:

$$x \to Cx, \qquad t \to Ct. \tag{12}$$

让我们提醒一下，通常非粘性液体流体动力学方程也具有这种不变性.

为了查阅方便,我们写出函数 $K(s)$ 及 $E(s)$ 当 $s \to 0$, $s \to 1$ 时的近似公式:

$$K(s) \approx \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{s^2}{4} + \frac{9}{64}s^4 + \cdots\right),$$

$$E(s) \approx \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{s^2}{4} - \frac{3}{64}s^4 + \cdots\right), \qquad s \ll 1;$$

$$K(s) \approx \frac{1}{2}\ln\frac{16}{1 - s^2}, \tag{13}$$

$$E(s) \approx 1 + \frac{1}{4}(1 - s^2)\left(\ln\frac{16}{1 - s^2} - 1\right), \quad (1 - s^2) \ll 1.$$

正象上面曾指出的那样,参数 r_2 可以从 r_1 变到 r_3. 所以自然可以认为，振荡所占据的区域，一方面以点 $x^-(t)$ 为界，在此点上 $r_2 = r_1$. 振幅 a 和参数 s 在此点上皆等于零. 另一方面,振动区域又以点 $x^+(t)$ 为界，在此点处 $r_2 = r_3$，所以 $s = 1$，并根据 (4)，波矢量 k 等于零. 在我们所研究的两个问题中，$x^+ > x^-$，所以我们将把 $a = 0$，$s = 0$ 的点叫做后阵面,而把 $s = 1$ 的点叫做前阵面.这相当于通常的图象：孤子的振幅愈大,则速度愈快[1].

---

1) 在文献 [15σ] 中，曾假定平均方程(8)的解存在强间断，即类似于通常流体动力学的激波. 而我们的分析证明，实际上不会产生这类间断，至少在我们所研究的这种类型问题是如此.

初始间断分解　在流体动力学中，小间断的分解则形成两个波，压缩波和稀疏波，二者都接近声速地朝相反方向运动(图 15)．这两个波分离得很迅速．

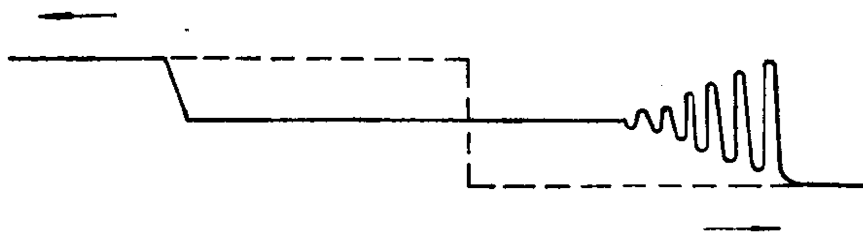


图 15．初始间断的分解所形成的压缩波和稀疏波．

所以可借助于 KdV 方程，分别来研究它们的进一步演化．这时可以认为，量 u 在初始时刻受到有限的跃变：

$$u=\begin{cases} u^-, & x<0, \\ u^+, & x>0, \end{cases} \quad t=0.$$

对于压缩波，$u^->u^+$；对于稀疏波，正好相反，$u^-<u^+$.

下面让我们开始研究压缩波．要注意到，在通常粘性流体动力学中，这种波用 Burgers 方程来描述．这种波乃是具有稳定阵面的弱激波．因此，这里研究的色散流体动力学中的压缩波便相应于通常粘性流体动力学中的激波．

让我们注意到，借助于变换(11)，(12)，压缩波的初始条件总可以简化成下面形式：

$$u=\begin{cases} 1, & x<0, \\ 0 & x>0, \end{cases} \quad t=0. \tag{14}$$

当 t 值不大时，方程(1)的非线性变得不重要，所以可以略去．于是线性化 KdV 的解有下面形式：

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x_1)G(x-x_1,t)dt,$$

$$G(\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(3t)^{1/3}}\Phi\left(\frac{\xi}{(3t)^{1/3}}\right), \tag{15}$$

式中 $\Phi(z)$ 为爱里 (Airy) 函数:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\cos\left(\frac{k^3}{3}+kz\right)dk.$$

把形如(14)的初始分布代入到这里,我们求出

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x/(3t)^{1/3}}^{\infty}\Phi(z)dz. \qquad (16)$$

此函数如图 16 所示. 第一个极大值在点 $z=x/(3t)^{1/3}=-2.45$ 处,它的高度为 $u_{\max}^{(1)}=1.28$; 第一个极小值在点 $z=-4.19$ 处,其高度为 $u_{\min}^{(1)}=0.81$; 第二个极大值和极小值分别在点 $z=-5.58$ 和 -6.89 处, 相应的高度分为 $u_{\max}^{(2)}=1.16$, $u_{\min}^{(2)}=0.86$. 当 $x/(3t)^{1/3}$ 负值很大时此函数的渐近值为

$$u(x,t)=1-\frac{1}{z^{3/4}}\cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

可以看出,在间断附近产生振荡. 当接近间断处,这种振荡的振幅增大. 振荡占据的区域随时间自型拉长. 同时色散效应的作用变弱而非线性作用变得愈加重要. 我们把方程 (1) 的

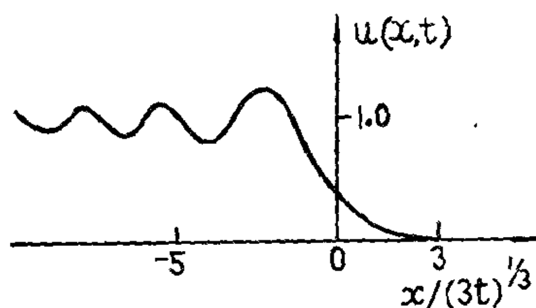


图 16. 初始间断分解的线性阶段.

色散项和非线性项加以比较, 发现形如(16)的线性解的适用条件为

$$t \ll 1.$$

由此显然可以看出,在很大的 $t \gg 1$ 的情况下,总是非线性决定波的结构.

在 $t \gg 1$ 的情况下，我们将寻求方程(1)这样形式的渐近解，即把它取作(2)，(6)的准稳波形式．于是，对平均方程(8)来说，必须将初始条件(14)加在 $\bar{u}$ 上，而当 $t=0$ 时，振幅 a 应取作零．很重要一点是，在初始条件(14)的情况下，由于存在相对(12)的不变性，方程(8)的解应带有自型的特性，即仅仅依赖于比：

$$\tau = x/t. \tag{17}$$

这样以来，可以认为

$$r_\alpha = r_\alpha(\tau). \tag{18}$$

根据上面所描述的普遍图象，采用 τ 为变量时，边界条件应有下面形式．在某一 $\tau=\tau^+$ 情况下，振动区域的"前阵面"应满足下面等式

$$s(\tau^+) = 1,$$

即

$$r_3(\tau^+) = r_2(\tau^+) \equiv r^+. \tag{19}$$

而由于量 $\bar{u}(\tau)$ 的连续性，则应有

$$\bar{u}(\tau^+) = 0. \tag{20}$$

其次，当 $\tau > \tau^+$ 时，简单地应有 $r_\alpha = 0$．在后阵面，在某一 $\tau = \tau^-$ 时，振幅 $a=0$，所以

$$r_2(\tau^-) = r_1(\tau^-) = r^-,$$
$$\bar{u}(\tau^-) = 1. \tag{21}$$

当 $\tau < \tau^-$ 时，$a=0$，$\bar{u}=1$．

将(18)代入到(8)，我们得到

$$\frac{dr_\alpha}{d\tau}(v_\alpha - \tau) = 0. \tag{22}$$

很容易推测出，如果仅使方程(22)的其中之一令其圆括号的表达式等于零，而另外两个方程可取作 $r_\alpha = \text{const}$，就可得到上面所认识到的解．显然，如果 r_2 仅依赖于 τ，便可满足边

界条件(19)和(20). 所以,我们感兴趣的解有下面形式:

$$\begin{aligned} v_2(\tau') &= \tau, \\ r_3 = \text{const}, \qquad r_1 &= \text{const}. \end{aligned} \tag{23}$$

首先让我们注意到,当 $a \to 0$,并考虑到 $a/s^2 = r_3 - r_1$,从(5)我们得到

$$\bar{u} = r_3. \tag{24}$$

于是,根据(21)

$$r_3 = 1.$$

而在前阵面,当 $s \to 1$ 时我们有

$$\bar{u} = r_1, \tag{25}$$

所以,

$$r_1 = 0, \qquad s^2 = r_2.$$

结果

$$a = s^2, \qquad V = (1 + s^2)/3, \qquad \gamma = -(1 - s^2), \tag{26}$$

而将公式(23)改写成下面形式:

$$\frac{1 + s^2}{3} - \frac{2}{3}\,\frac{s^2(1 - s^2)K(s)}{E(s) - (1 - s^2)K(s)} = \frac{x}{t}. \tag{27}$$

公式(26),(27)和(2)一起,完全解决了所提出的问题. 不过我们要强调一下,量 $u(x, t)$ 本身由公式(2)确定,当然它不只是依赖于此 x/t (只是慢变量 r_α 才仅依赖于 x/t).

下面让我们专门研究在前阵面附近及后阵面附近解的行为.

在后阵面. 当 $a \to 0$ 时,我们利用公式(13)很容易求出

$$-1 + \frac{3}{2}s^2 = \tau$$

或者

$$\tau^- = -1, \qquad a = s^2 \approx \frac{2}{3}\tau' \tag{28}$$

$$(\tau = \tau^- + \tau' = -1 + \tau'),$$

所以当 τ 趋于 τ^- 时，振幅按线性规律变成零。

在前阵面，当 $s \to 1$ 时，代替(28)我们得到

$$\frac{2}{3} - \frac{1 - s^2}{3} \ln \frac{16}{1 - s^2} \approx \tau.$$

由此我们求出

$$\tau^+ = 2/3.$$

$1 - s^2$ 变成零的规律有下面形式：

$$(1 - s^2) \ln \frac{16}{1 - s^2} = 3|\tau''|, \tag{29}$$

式中 $\tau = \tau^+ + \tau''$，$\tau'' < 0$，或者以对数的精确度：

$$1 - s^2 \approx \frac{3|\tau''|}{\ln(1/|\tau''|)}$$

因此从(4)可看到，当 $s \to 1$ 时，波矢量 k 按下面规律等于零：

$$k \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \frac{1}{\ln(1/|\tau''|)}. \tag{30}$$

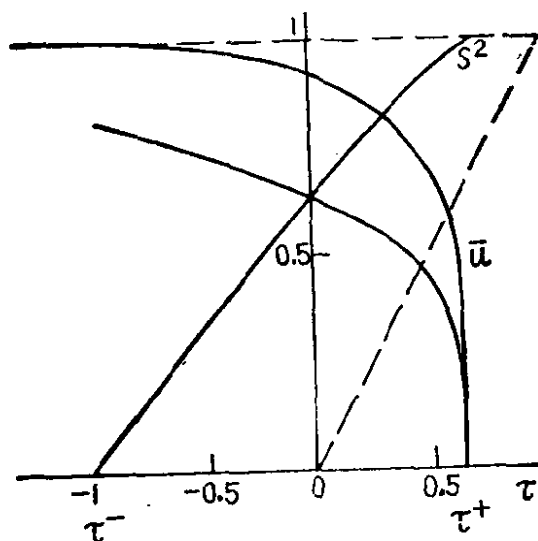


图 17. 在初始间断分解时，平均量作为 $\tau = x/t$ 的函数关系.

最后，当 $s\to 1$ 时，平均值 $\bar{u}$ 有下面形式:

$$\bar{u}=\frac{4}{\ln(1/|\tau''|)}. \tag{31}$$

当 $\tau=\tau^+$ 时，函数 $\bar{u}(\tau)$ 的导数为无限大，因此在这一点上它受到弱间断，即导数 $d\bar{u}/d\tau$ 的间断. 重要的是这种间断以超声速运动(因 $\tau^+=2/3$，而声速相应于 $\tau=0$). 这种间断我们将称作奇异间断[1].

根据公式(26)、(27)，图 17 画出 $\bar{u}$，$a=s^2$ 及波矢量 k 的图形. 图 18 表示出当 $t=50$，100 时，非平均量 $u(x,t)$ 的值. 可以看到，振荡所占据的区域随时间迅速增大. 在波的前阵面，逐渐分离出一些孤子，这些孤子之间的距离随时间以对数形式增长(参看(30)). 从图 19 可看出这一事实，在此图中指出 $t=100$，1000 和 10000 时波的前阵面[2].

最后让我们注意到，为了达到从单位跃变(14)过渡到具

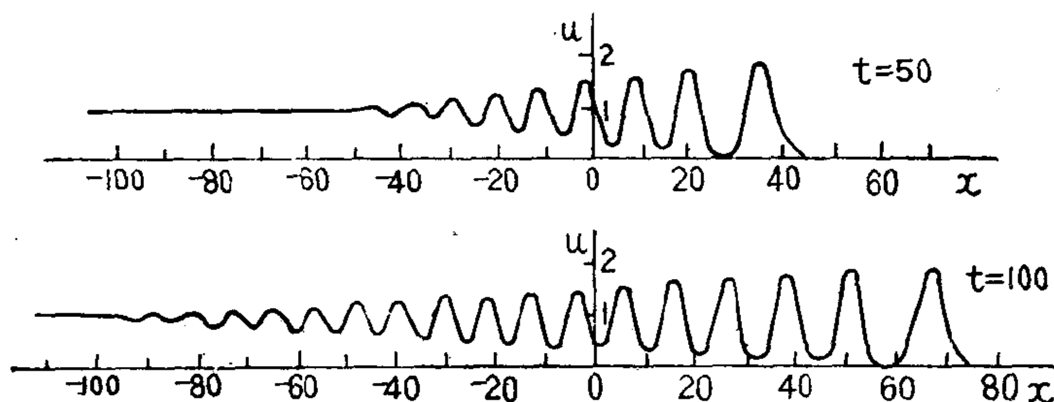


图 18. 在初始间断分解情形下的无碰撞激波.

1) 参看本节第一个脚注.

2) 但是，用公式(2)及(27)计算前阵面时，即当 $\tau=\tau^+$，$u=2$ 时，第一个突峰的形状失真，它的前半部被"截断". 更详细的研究证明，振动的前阵面内有孤子的形式. 所以在图形中，前面的突峰增补成一个振幅为 $2a=2$ 的孤子. 所指出的情况同公式(27)不够精确有关，因为当 t 的值不太大时，理论的渐近特点不可能确定波的准确位相. 所以，图 18 和图 19 所示的全部图形，可以位移相当于孤子宽度同样量级的距离. (图 26 也属于这种情况，参看 281 页.)

有任意跃变 u^-，则根据(10)，需将所得到的解 u 之值乘以 u^- 并同时将 x 值除以 $u_-^{1/2}$、t 值除以 $u_-^{3/2}$ 便可．这时 τ 值乘以 u^-．例如，对具有 $u^- = 2$ 的跃变来说，图 18 中的图形现在便对应于 $t = 17.7$ 和 35.4．

现在让我们简略谈一下稀疏波的演化，即另一种符号的间断：$u^- < u^+$（不失一般性，可以令 $u^- = -1/2$，$u^+ = 1/2$）．显然，形如(27)的解不能描述这种跃变，这是因为 $r_2 > r_1$，因而从(24)、(25)立刻得到 $u^- > u^+$．但是，方程(8)这时还是存在无振荡的平凡解：

$$u = \bar{u} = \begin{cases} -1/2, & \tau < -1/2 \\ \tau, & -1/2 < \tau < 1/2, \\ 1/2, & \tau > 1/2. \end{cases} \tag{32}$$

当 $\tau = -1/2$ 和 $\tau = 1/2$ 时，这种解存在两个弱间断并相应

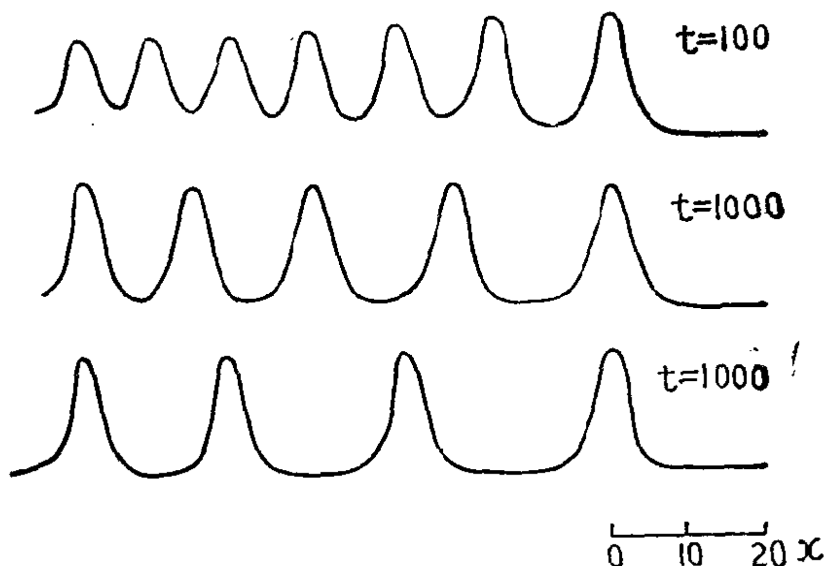


图 19． 在初始间断分解时，无碰撞激波阵面中的诸孤子的形成．

于忽略掉色散，也即方程(1)的三阶导数项．一般来讲，考虑到色散，这些弱间断以振荡方式逐渐拉平（图 20）．当 t 很大时，可以分别考虑这两个间断．为了求出左间断（我们将把这

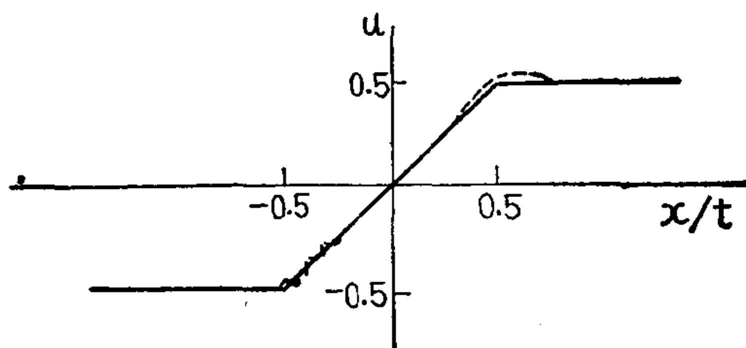


图 20. 稀疏波的结构.

种间断叫做"A 型间断")的结构,需要求出方程(1)满足下面边界条件的解:

$$u \to -1/2, \qquad 当\ x \to -\infty\ 时,$$
$$u \to x/t, \qquad 当\ x \to \infty\ 时.$$

用下面边界条件来描述在间断——"B型间断": 当 $x \to -\infty$ 时, $u \to x/t$; 而当 $x \to \infty$ 时, $u \to 1/2$. 这些边界条件对应形如下面的自型解:

$$u = \frac{1}{(3t)^{2/3}}\,\phi(z) - \frac{1}{2}, \qquad z = \frac{x + t/2}{(3t)^{1/3}},$$

对A型间断, 其中当 $z \to -\infty$ 时 $\phi \to 0$, 而当 $z \to \infty$ 时 $\phi \to 3z$. 对 B 型间断

$$u = \frac{1}{(3t)^{2/3}}\,\phi(z) + \frac{1}{2}, \qquad z = \frac{x - t/2}{(3t)^{1/3}},$$

其中当 $z \to -\infty$ 时 $\phi \to 3z$, 而当 $t \to \infty$ 时 $\phi \to 0$. 函数 $\phi(z)$ 满足常微分方程[1]:

$$\phi''(z) + (\phi - z)\phi' - 2\phi = 0. \qquad (33)$$

让我们指出这样一种非平凡情形, 即就其这种情形的结构来说,不管间断如何弱, 方程(1)或者方程(33)的非线性项都非

1) 以前也研究过,在这里利用的方程(1)的自型解形式, 但同弱间断问题没有关系,因为它们的边界条件不同.

常重要.

对于上面写出的几种边界条件，方程(33)的解可用数字计算得到. A 型间断结构如图 21(a) 所示; B 型间断结构如图 21(b) 所示. 我们看出,在第一种情形中,间断结构带有振荡特性;而第二种情形中,间断结构带有单调特性. 当 z 很大时,A 型间断的振荡项按下面规律衰减:

$$\frac{1}{z^{1/2}}\cos\left[(2z)^{2/3}/3\right].$$

(图 21 虚线表示渐近值 $\psi=3z$.)我们注意到,间断宽度的量级是 $t^{1/3}$. 但由于"稀疏波"的全部图象按照(32),都同 t 成比例地加宽,所以间断的相对宽度随时间发展而减小.

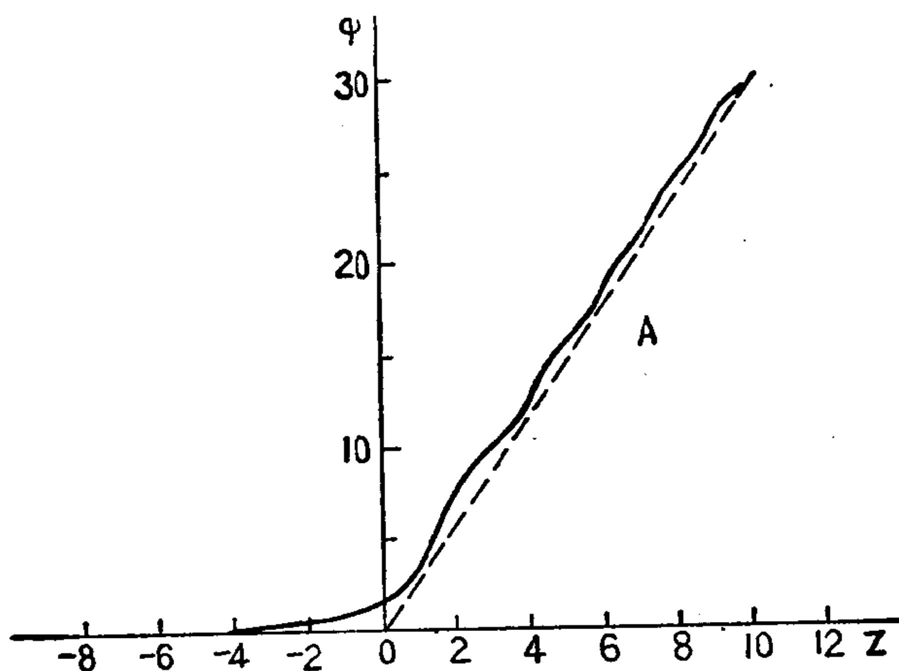
下面我们指出,在通常(耗散)流体动力学中,可以用解析形式找到粘性流体中的弱间断结构. 在这种情形中,问题简化为构造 Burgers 方程的某种解,这种解有确定的自型解的形式.

这样以来,对稀疏波情形,在色散流体动力学中的解,它的图象大体上类似于通常流体动力学中的解. 另一方面,在压缩波情形中,色散流体动力学会导致新的重要现象. 这里出现自型加宽的振荡区域而不是具有稳定阵面的强间断. 换言之,正是由于振荡,才使无耗散激波的振动阵面迅速加宽而失去明显的轮廓.

在阵面翻转点附近产生的振荡.

前面我们对于初始密度间断比较简单的情况,研究了无碰撞激波的产生. 现在我们就来着手解更难的问题,研究"阵面翻转"点附近的现象.

大家知道,在理想液体流体动力学中,非线性效应使传播在介质中的扰动阵面产生卷缩. 这就会在某一时刻内使出现在某一点处的导数(譬如说,密度关于坐标的导数)变成无限



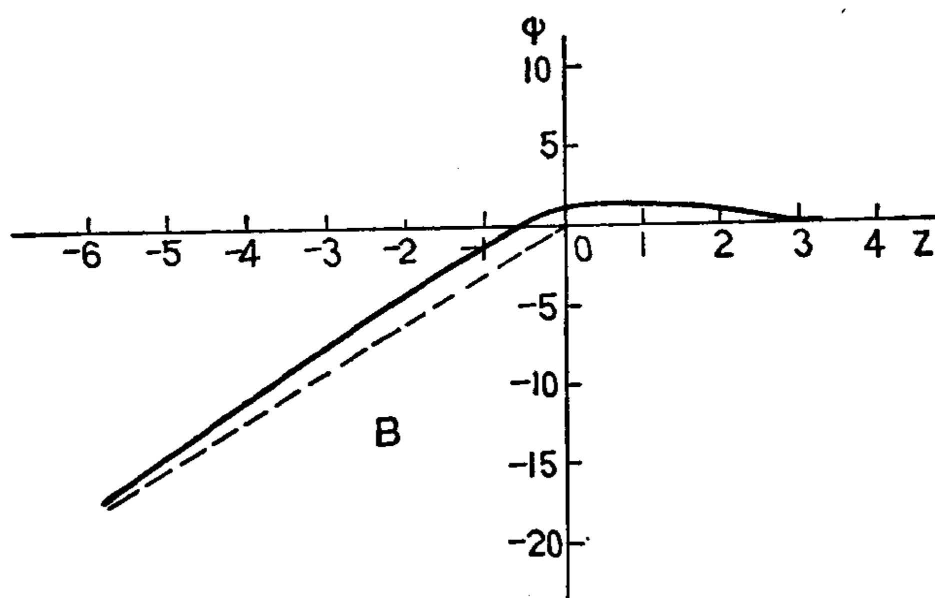


图 21. A 型弱间断(a)和 B 型弱间断(b).

大——阵面"被翻转".

在通常流体动力学中，翻转之后产生激波．在色散流体动力学中，在翻转点附近色散变得重要，故翻转之后产生充满

振动的区域．如果考虑从翻转时刻起经历了足够长的时间，故振动数目已经很大，于是可用平均方程(8)来描述这种过程．这些方程在充满振动的区域内部是成立的．所以产生这样的问题，即函数 r_a 在这种区域的边界上应满足什么样的边界条件．我们已经说过，在振动区域的前阵面应满足等式 $r_2=r_3$，而振动区域的后阵面 $r_2=r_1$．但是，正象我们看出的那样，对系统(8)的解来说，这些点都是奇导的．因此为了有效利用这些边界条件，必须阐明这些点附近解的形式．

让我们首先研究前阵面．在某一点 $x=x^+(t)$ 处，假设 $r_2=r_3\equiv r^+(t)$．利用表达式(9)，很容易验证，当 $r_2=r_3$ 时，速度 v_2 和 v_3 也相等：$v_2^+=v_3^+\equiv v^+=(r_1^++2r^+)/3$．这时从方程(8)得到

$$dx^+/dt=v^+=(r_1^++2r^+)/2. \tag{34}$$

让我们假定

$$r_2=r^++\delta r_2,\quad r_3=r^++\delta r_3,\quad x=x^++x'',$$

式中 δr_2，δr_1 和 x'' 为前阵面附近很小的量．对于余下所有可能情形很容易验证，在阵面附近，

$$|\delta r_2-\delta r_3|\gg|\delta r_2+\delta r_3|,|r_1-r_1^+|\quad[r_1^+=r_1(x^+,t)].$$

所以变化最快的量是参数 s．对 δr_2 的方程有下面形式：

$$(v^+-v_2)\left(\frac{\partial\delta r_2}{\partial x'}\right)_t=\left(\frac{\partial r^+}{\partial t}\right)_{x=x^+}$$

对 δr_3 也存在类似的方程．当 $s\to1$ 时，利用椭圆积分展开式，对群速度我们找到

$$v_{2,3}\approx v^+\mp(r^+-r_1^+)\frac{\frac{s'^2}{2}L}{1\mp\frac{s'^2}{4}L},$$

式中 $s'^2=1-s^2$ 及 $L=\ln[16/(1-s^2)]$．

现在从 δr_3 的方程来计算 δr_2 的方程，我们得到下面方

程:

$$\frac{\partial}{\partial x''}(1-s^2)=-\frac{3}{r_3^+-r_1^+}\left(\frac{\partial r_3^+}{\partial t}\right)_{x=x^+}\frac{1}{(1-s^2)\ln\frac{16}{1-s^2}}.$$

此方程的解确定出把 s 变成单位 1 的规律，因而也就确定出，在振荡区域的前阵面附近把振动波长变成无限大的规律

$$(1-s^2)^2\left(\ln\frac{16}{1-s^2}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=-\frac{6}{(r_3^+-r_1^+)^2}\left(\frac{\partial r_3^+}{\partial t}\right)_{x''=0}x''. \tag{35}$$

从式(35)得到，当 $x''\to 0$时，波矢量 k 按同$(\ln|x''|)^{-1}$成比例的规律变成零，这同上面所研究的初始间断分解的特殊情形一样．很容易验证，当 $x''\to 0$ 时，平均值 $\bar{u}$ 也按同 $(\ln|x'|)^{-1}$ 成比例的规律趋于自己的极限值．所以在一般情形中，前阵面中的 $\bar{u}(x)$ 存在导数为无限大的奇点．

对于后阵面来说，可以进行完全类似的计算．并且在这里，当 $x=x^-$ 时，用符号"一"来标记后阵面全部量之值，我们有

$$r_1^-=r_2^-\equiv r^-,\quad v_1^-=v_2^-\equiv v^-=2r_1^--r_3^-,$$
$$\frac{dx^-}{dt}=v^-. \tag{36}$$

参数 s 仍然是变化最快的量并且它变成零的规律由下面公式来确定:

$$s^2=\frac{2}{r_3^--r_2^-}\left|\left(\frac{\partial r_2^-}{\partial t}\right)_{x'=0}x'\right|^{1/2},\quad x'=x-x'. \tag{37}$$

特别，从这个公式可以看出，在一般情形中，振动的振幅 a 按根号规律（即 $a\backsim\sqrt{|x'|}$）变成零．（这一点同初始间断分解的特殊情形不同．让我们提醒一下，在那里振幅按线性规律变成零．）而平均值 $\bar{u}$ 按线性规律趋于极限值．

对振动占据有限空间区域的问题，应把表达式(34)和(36)当作方程(8)的自然边界条件来用.

现在我们就可以回过头来研究，在色散流体动力学中，在某一扰动"阵面翻转"之后所产生的振荡结构.

让我们研究某一扰动，它的初始范围很大：$R_0 \gg 1$. 这时在方程(1)中最初可以忽略色散. 随着时间的发展，非线性效应导致扰动阵面陡度变大，所以在某一 $t=0$ 时刻，导数 $\partial u/\partial x$ 变成无限大（图 22a，b）. 这就是说，在这一时刻'

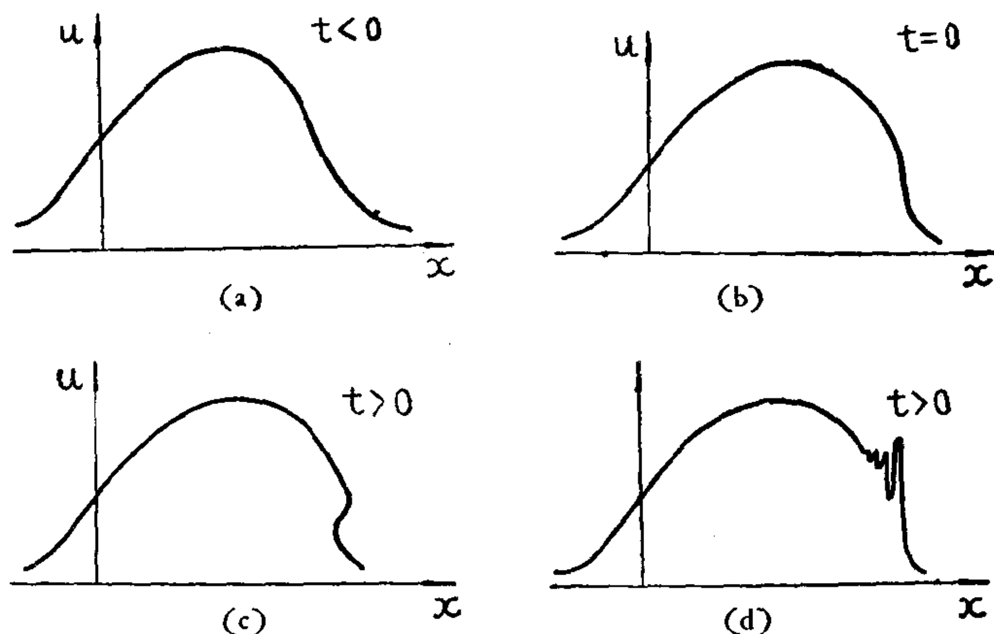


图 22. 阵面在初始扰动演化时的翻转.

发生"阵面翻转"；随着 t 的进一步增加，忽略色散所得到的解，形式上产生三个值(图 22c). 而方程(1)在翻转点附近色散变得重要，因而在翻转之后形成充满振动的加宽区域(图 22d).

为了描述翻转点附近的现象，首先让我们注意到，忽略色散之后，也即忽略三阶导数项，方程(1)可以写成下面形式：

$$\frac{\partial u/\partial t}{\partial u/\partial x} = -\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_u = -u,$$

所以通解有下面形式：

$$x = ut + P(u),$$

式中 $P(u)$ 为任意函数．在翻转时刻，这时首先出现具有下面条件的点：

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_t = 0, \tag{38}$$

在此点上还应有

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)_t = 0, \tag{39}$$

并且借助于 t，x 和 u 的计算起点的选取，总可以设法在这些点上得到 $t = x = u = 0$．将 $P(u)$ 按 u 展开并考虑到式(38)，(39)，我们求出

$$P(u) \approx -\mu u^3.$$

其中借助变换(10)，总可以使 μ 等于单位 1[1]．

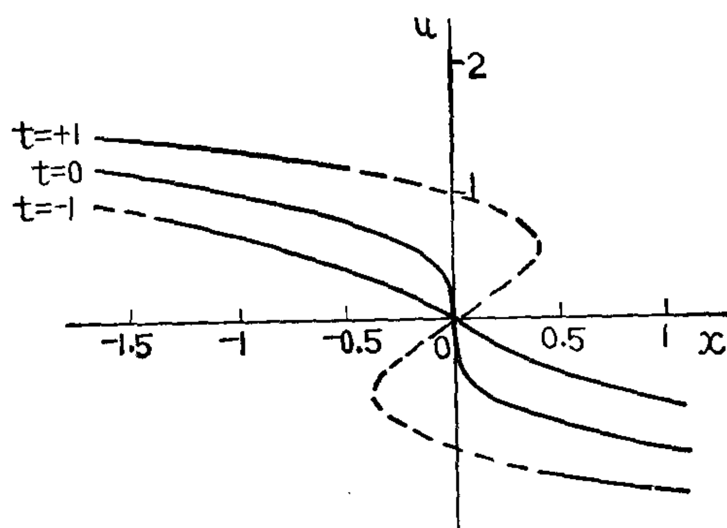


图 23． 阵面翻转的初始自型阶段．

最后用下面公式来描述在翻转点附近的解（并且在翻转时刻前不久）：

1）为了返回到 $\mu \neq 1$ 的情形，在最后结果中，只须将 u 值乘以 $\mu^{-2/7}$，x 值乘以 $\mu^{1/7}$ 及 t 值乘以 $\mu^{3/7}$ 便可．同时 z 值乘以 $\mu^{-1/2}$．

$$x = ut - u^3. \tag{40}$$

这种解如图 23 所示. 当 $t > 0$ 时,解变成非单值的(虚曲线). 实际上,当 $t > 0$ 时出现振动. 我们仍假定,振动占据有限的空间区域. 在这种区域内, 解用方程 (8) 来描述. 在此区域外, 按以往, (40)是成立的, 所以 u 在这种区域有下面形式:

$$u = t^{1/2}\theta(z), \qquad z = x/t^{3/2}, \tag{41}$$

式中 θ 由下面方程来确定:

$$z = \theta - \theta^3. \tag{42}$$

为了使解(8)和(42)在振动区域的边界处衔接起来,需假定[1)]

$$r_\alpha = t^{1/2}l_\alpha(x/t^{3/2}) = t^{1/2}l_\alpha(z). \tag{43}$$

因此,在这种情形中, 振动占据的区域按 $\backsim t^{3/2}$ 规律加宽, 而当 z 给定时,振动的振幅按同 $t^{1/2}$ 成比例的形式增长. 把(43)代入到(8),对 l_α 我们得到三个常微分方程组:

$$\frac{dl_\alpha}{dz} = \frac{l_\alpha}{3z - w_\alpha}, \tag{44}$$

式中 $w_\alpha = v_\alpha/t^{1/2}$, 所以通过 l_α 用同 (9) 相同类型的公式来表示 w_α (只不过公式(9)是通过 r_α 来表示 v_α 的). 当然不能用求积分来解方程组(44). 但利用上面所得到的公式(34)和(35),很容易阐明在前阵面和后阵面附近的解的行为.

例如,设前阵面对应值 $z = z^+$. 于是从条件 $dx^+/dt = v^+$ 得到

$$z^+ = \frac{4}{9}l_3^+ + \frac{2}{9}l_1^+. \tag{45}$$

另一方面,当 $z = z^+$ 时,考虑到公式(25),连续性条件给出:

---

1) 在一般情形中, 方程 (8)具有形如下面的自型解: $r_\alpha = t^\gamma l_\alpha(x/t^{1+\gamma})$, 其中方指数 γ 是任意的.

$$z^{+} = l_1^{+}[1 - (l_1^{+})^2]. \qquad (46)$$

同时必须选取值 $l_1^{+} < 0$，因为这种解应同函数 $\theta(z)$ 通往 $z = +\infty$ 处的分枝衔接起来(图 24)。当 $z = z^{+}$ 时，我们有

$$\left(\frac{\partial r_3^{+}}{\partial t}\right)_{z''=0} = \left(\frac{\partial r_3}{\partial t}\right)_{z=z^{+}} = \frac{1}{2}\frac{r_3^{+}}{t},$$

所以从公式(34)可以直接得到在前阵面附近解的行为:

$$(1 - s^2)^2\left(\ln\frac{16}{1 - s^2} + \frac{1}{2}\right) \approx -\frac{6 l_3^{+} z''}{(l_3^{+} - l_1^{+})^2},$$

$$z'' = z - z^{+} < 0, \qquad l_3^{+} > 0. \qquad (47)$$

这表明,在所研究的这种特殊情形中,当阵面的性质原来是同上面曾谈到的一般情形相同.

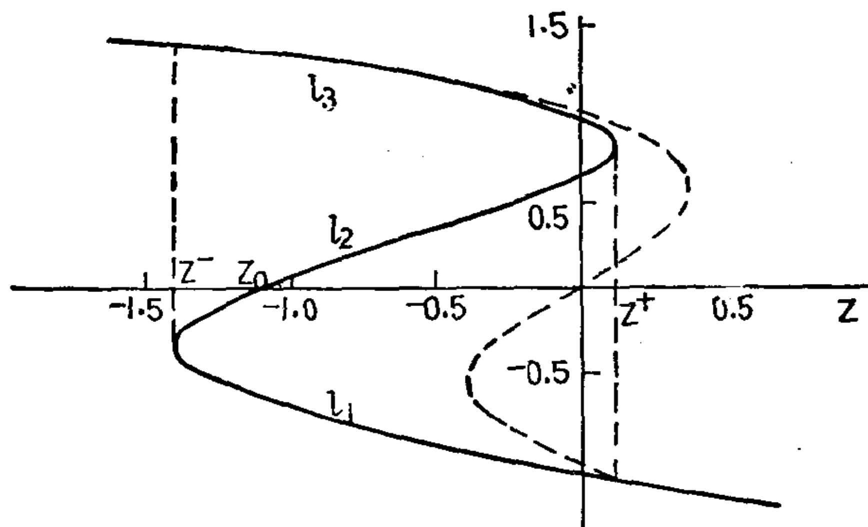


图 24. 在阵面翻转时 Whitham 参数对 $z = x/t^{3/2}$ 的依赖关系.

类似地,在后阵面附近,从阵面以速度 $v_1^{-} = v_2^{-} = v^{-}$ 运动的条件出发,我们有

$$z^{-} = \frac{4}{3} l_1^{-} - \frac{2}{3} l_3^{-}. \qquad (48)$$

从解的连续性条件得到

$$z^{-} = l_3^{-}[1 - (l_3^{-})^2], \qquad l_3^{-} < 0. \qquad (49)$$

最后，从(36)立即得到后阵面附近解的形式：

$$s^2 = \frac{2|l_1^- z'|^{1/2}}{l_3^- - l_1^-}, \quad z' = z - z^- > 0. \tag{50}$$

为了确定 l_α 在整个振动区域的值，则给出了方程(44)的数值解．结果如图 24 所示．我们看到，对所有 z 值，参数 $l_3 > 0$，$l_1 < 0$． 而参数 l_2 在某一点 z_0 处变号． 这个点是奇异的．的确，从 l_2 的方程可看出，此量仅在分母 $3z - 2w_2$ 等于零处才可等于零．但很易证明，点 z_0 处的奇异性相对很弱．在此点上不仅量 l_α 连续，而且连它们的一阶导数也连续．不过存在这种奇异性是很重要的，因为仅仅由于这种奇异性才有可能满足边界条件．原因是，对解要加上四个边界条件：(45)，(46)和(48)，(49)．而系统(44)的通解仅仅含有三个任意常数． 因此缺少一个常数正好由于存在奇点 z_0 而得到补充．为了弄清出现这种情形的来龙去脉，我们将从两方面，即从预先不知道的两个点 z^- 和 z^+ 来构造解．在满足条件(45)，(46) 和 (48)，(49) 之后，我们保留两个任意常数．作为这两个常数，例如可选为 l_3^- 和 l_1^+ 之值．我们是这样来处理其中一个常数的，让它使得 l_2 在同一点 z_0 处从两边变成零． 而我们可以这样来选另外一个常数，使得量 l_3 当 $z = z$ 时连续．这时 l_1 的连续性将自动得到保证，这时由于

$$3z_0 = 2w_2 \qquad \text{当 } z = z_0 \text{ 时}.$$

实际上，解正是用这种方法构造成的．

应指出，在 $l_\alpha(z)$ 的图解与方程 (42)的三值形式的解之间具有奇妙的相似性．(三值函数 $\theta(z)$ 的图解如图 24 的虚线所示．)这样一来，存在具有振动的解乃是同无色散方程的解中存在非单值性区域息息相关的．

图 24 的图解连同公式(2)、(6) 及(41)一道，解决了所提出的问题，在阵面翻转情况下确定 $u(x, t)$．

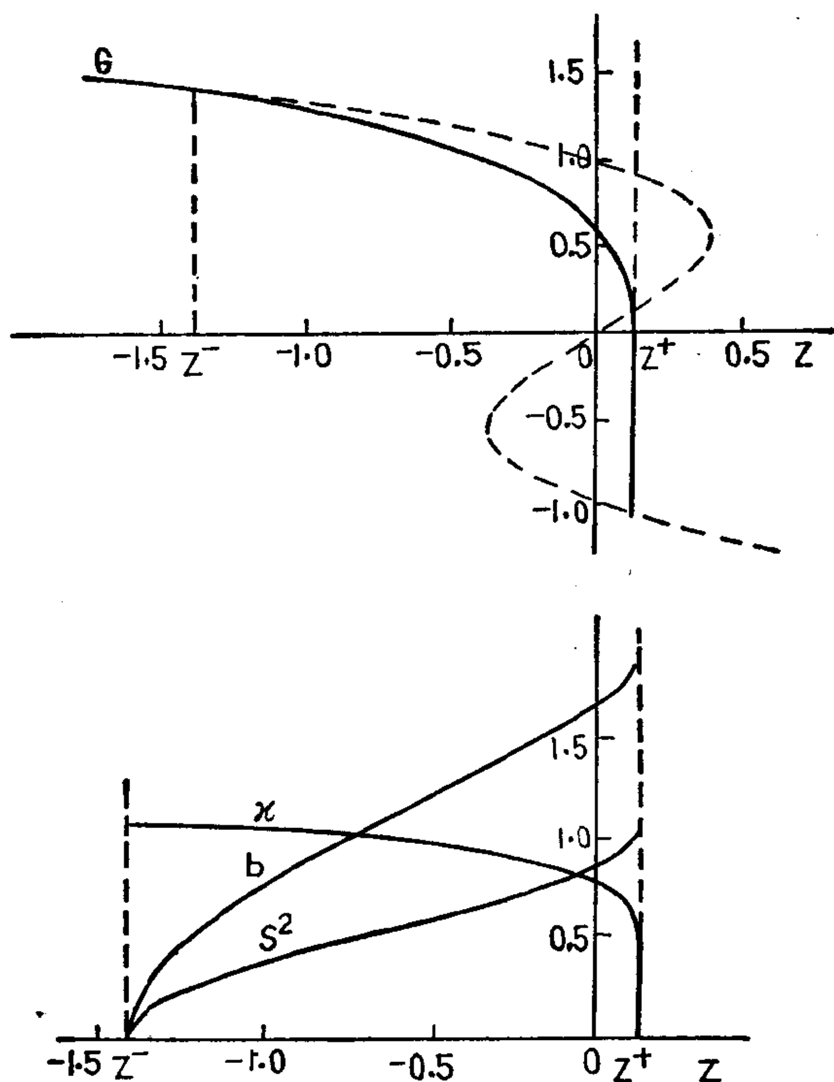


图 25. 在阵面翻转情形下，平均量对 z 的依赖关系.

对解的奇点坐标算出以下各值:

$$z^- = -1.41, \quad z^+ = 0.117, \quad z_0 = -1.11.$$

前阵面孤子的振幅等于

$$2a^+ = 2(l_2^+ - l_1^+)t^{1/2} = 3.69t^{1/2}. \qquad (51)$$

从自型关系式(43)可以看出，平均值 $\bar{u}$，振幅 a 以及波矢量 k 可以表示成下面形式:

$$\bar{u} = t^{1/2}\theta(z), \quad a = t^{1/2}b(z), \quad k = t^{1/4}\kappa(z). \qquad (52)$$

图 25 画出了函数 $\theta(z)$, $b(z)$, $\kappa(z)$ 以及 $s^2(z)$ 的图形.（我们强调指出，当 $z \to z^+$ 时，函数 $\kappa(z)$ 连续地趋于零.）

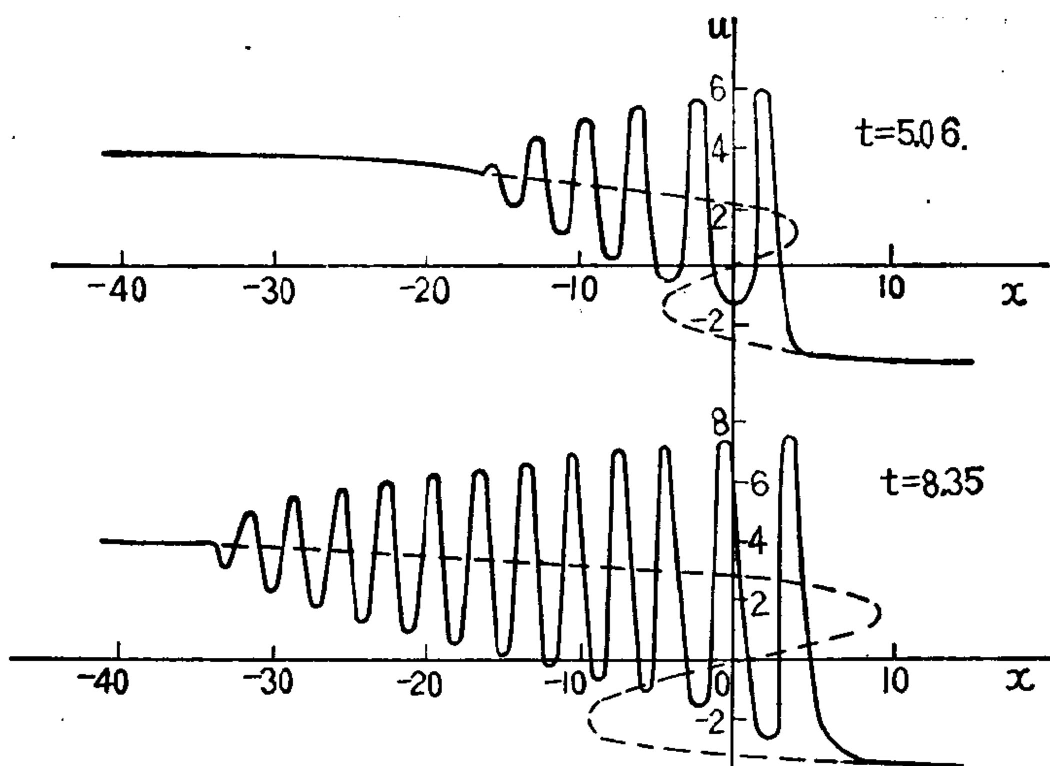


图 26. 阵面翻转情形下的无碰撞激波.

对 $t=5.06$ 和 8.35 的情形，图 26 画出了 u 对 x 的依赖关系. 可以看出，随着时间的增加，振动区域迅速加宽，振动的振幅增大而波长减小.

附录 Кадомцев-Петвиашвили（二维 KdV）方程理论．某些分立系统

§ 1. 某些可积的二维系统

前面的理论仅涉及到含有两个变量的未知函数之方程的积分．近几年研究证明，逆散射问题技术有时也可搬到变量数目多的情形．

到目前为止，在 lax 表象

$$\frac{\partial L}{\partial t}=[L, A] \tag{1}$$

中所出现的微分算子 L，A 只依赖于唯一的变量 x．这时根据所给定的算子 L，在关于$\partial/\partial x$ 的任意阶中能找到生成可积方程系统之算子A的相应类．如果算子L含有若干个变量的导数，情况就会发生显著的变化；把前面理论正确推广到这种情形不是平凡的，并且在文献[1—3]中讨论了这种推广．例如，假设

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+u.$$

经直接计算很容易验证，仅当算子A是具有常系数的一阶算子时，方程(1)现在才生成关于 u 的方程；这时对 u 的方程是平凡的．如果L含有两个或更多变量的导数，则现在情形是典型的．不过可以消除这种情形．假设

$$L=\alpha\frac{\partial}{\partial y}-M, \tag{2}$$

式中M为关于x的常微分算子．这时关系式(1)可重写成对称形式：

$$\left[\alpha\frac{\partial}{\partial y}-M,\quad \frac{\partial}{\partial t}-A\right]=0 \tag{3}$$

因此关系式(1)变成普通微分算子的关系式．

让我们研究以下几个例子．

1．假设

$$\begin{aligned} M&=-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-u(x,y,t),\\ A&=-4\frac{\partial^3}{\partial x^3}-6u\frac{\partial}{\partial x}-3u_x+3\alpha w; \end{aligned} \tag{4}$$

这时条件(3)变成下面系统(参看[4,5])：

$$\begin{aligned} &w_x=u_y,\\ &u_t-6uu_x-u_{xxx}-3\alpha^2w_y=0, \end{aligned} \tag{5}$$

此系统等价于下面方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_t-6uu_x-u_{xxx})=3\alpha^2u_{yy}. \tag{6}$$

方程(6)乃是 KdV 方程向二维情形的推广，它是熟知的 KП (Кадомцев-Петвиашвили 或者二维 KdV) 方程．这种方程的普适程度同 KdV 方程是一样的．

为了证实这一点，让我们研究这样介质的色散律，即对这种介质来说，声速对波数的依赖关系是很弱的：

$$w^2=k^2+\varepsilon k^4,\qquad \varepsilon k^2\ll 1. \tag{7}$$

假设介质是二维的：$k=(k_x,k_y)$；其中 $k_y\ll k_x$．于是可以假定

$$w^2-k_x^2=(w-k_x)(w+k_x)=\varepsilon k_x^4+k_y^2.$$

过渡到运动计算系统(假定 $w = k_x + \Omega$, $\Omega \ll k_x$), 我们得到近似式:

$$2k_x\Omega \cong \varepsilon k_x^4 + k_y^2,$$

即精确到简单的变量代换,此关系式同方程(6)的线性部分的付里叶变换相同,其中这里 $\varepsilon = -(3\alpha^2)^{-1}$.

KΠ 方程解的性质本质上决定于 α^2 的符号. 不失一般性,可以认为 $\alpha^2 = \pm 1$. 当 $\alpha = 1$ 时(我们将把这种情形叫做稳定的), L 算子等于热传导算子:

$$L = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u. \tag{8}$$

在不稳定情形中(当 $\alpha = i$ 时), L 算子等于非定态薛定谔算子:

$$L = i\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u. \tag{9}$$

2. 假设 M 和 A 为一阶矩阵算子[6,7]:

$$\begin{aligned} M &= a\frac{\partial}{\partial x} + V, \\ A &= b\frac{\partial}{\partial x} + W. \end{aligned} \tag{10}$$

式中 a, b, V, W 为三阶方阵. 假设矩阵 a 和 b 是实的并且是对角的:

$$a = \mathrm{diag}(a_1 a_2 a_3), \qquad b = \mathrm{diag}(b_1 b_2 b_3),$$

$$a_1 > a_2 > a_3,$$

而矩阵 V 和 W 服从下面关系式:

$$[a, W] = [b, V]. \tag{11}$$

让我们假定 $v_{ij} = iu_{ij}\sqrt{|a_i - a_j|}$, $w_{ij} = \dfrac{b_i - b_j}{a_i - a_j} v_{ij}$, 其中 u_{ij} 为对角元等于零的厄米矩阵,它有下面形式:

$$u_{ij}=\begin{pmatrix}0 & u_3 & u_1\\ \bar{u}_3 & 0 & u_2\\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & 0\end{pmatrix}.$$

于是条件(3)引导出下面方程组:

$$\begin{aligned}&u_{1t}+v_1^x u_{1x}+v_1^y u_{1y}=iqu_2u_3,\\&u_{2t}+v_2^x u_{2x}+v_2^y u_{2y}=iqu_1\bar{u}_3,\\&u_{3t}+v_3^x u_{3x}+v_3^y u_{3y}=iqu_1\bar{u}_2,\end{aligned}\tag{12}$$

式中

$$q=\frac{a_1b_2-a_2b_1+a_3b_1-a_1b_3+a_2b_3-a_3b_2}{\sqrt{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)}},$$

$$v_1^x=\frac{b_1a_3-b_3a_1}{a_1-a_3},\quad v_1^y=-\alpha\frac{b_1-b_3}{a_1-a_3},$$

$$v_2^x=\frac{b_2a_3-b_3a_2}{a_2-a_3},\quad v_2^y=-\alpha\frac{b_2-b_3}{a_2-a_3}$$

$$v_3^x=\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_1-a_2},\quad v_3^y=-\alpha\frac{b_1-b_2}{a_1-a_2}.$$

方程组(12)乃是第三章所研究的三波系统向两个空间变量的推广情形 (参看第三章 §4).

3.假设

$$\begin{aligned}M&=-\begin{bmatrix}l+1 & 0\\ 0 & l\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}-\begin{bmatrix}0 & \phi\\ \pm\bar{\phi} & 0\end{bmatrix},\\A&=i\begin{bmatrix}a+1 & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{i}{2}\left(\begin{bmatrix}0 & \phi\\ \pm\bar{\phi} & 0\end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\right.\\&\quad\left.+\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}0 & \phi\\ \pm\bar{\phi} & 0\end{bmatrix}\right)+i\begin{bmatrix}r_1 & \varphi_1\\ \varphi_2 & r_2\end{bmatrix},\end{aligned}\tag{13}$$

式中

$$\begin{aligned}\varphi_1&=\alpha\phi_y+(l-2a-1)\phi_x,\\\varphi_2&=\mp(\bar{\alpha}\phi_y+(l-2a)\bar{\phi}_x)\end{aligned}$$

条件(3)现在给出下面方程组:

$$i\phi_t + D_1\phi + u\phi = 0, \qquad u = r_1 - r_2,$$
$$D_2 u = \mp 2D_1|\phi|^2, \tag{14}$$

式中 D_1, D_2 为下面微分算子:

$$D_1 = \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2(l-a)\alpha\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + (l^2 - 2la - a)\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

$$D_2 = \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha(2l+1)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + l(l+1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

算子 D_1, D_2 的系数二次形式总是有一个不同的正负号差. 特别是, 当 $l = a = -1/2$ 时,

$$D_1 = \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad D_2 = \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

为了方便引入表示 $u = \mp 2|\phi|^2 + v$; 这时系统(14)有下面形式:

$$i\phi_t + \frac{1}{4}\phi_{xx} + \alpha^2\phi_{yy} \mp 2|\phi|^2\phi + v\phi = 0,$$
$$\left(\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \alpha^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v = \mp\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}|\phi|^2. \tag{15}$$

当 $\alpha = i$ 时, 系统(15)描述深度不大的液体表面中的准单色波包 (Davey-Stewartson 系统[8]).

其它值得注意的情形乃是算子 D_1 的二次形退化情形. 假设 $a = 0$, 这时系统简化成下面形式:

$$i\phi_t + \frac{\partial^2\phi}{\partial\xi^2} + u\phi = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial\eta} = \mp 2\frac{\partial}{\partial\xi}|\phi|^2, \tag{16}$$
$$\frac{\partial}{\partial\eta} = \alpha\frac{\partial}{\partial y} + (l+1)\frac{\partial}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial\xi} = \alpha\frac{\partial}{\partial y} + l\frac{\partial}{\partial x}.$$

系统(16)可在等离子体物理中得到应用.

显然，系统(12)，(14)乃是非线性薛定谔方程的二维推广，并且如果 $\partial/\partial y = c\partial/\partial x$ 就简化为非线性薛定谔方程.

§2. 守恒律

用代换 $\psi \to e^{\frac{\lambda}{\alpha}y}\psi$ 可将算子(1.2)的谱问题简化成下面方程的解:

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial y} = M\psi. \tag{1}$$

由于 Lax 表象(1.3)，下面方程是同(1)相容的:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = A\psi. \tag{2}$$

直接从系统(1)，(2)可以构造相应非线性方程的无穷守恒律. 让我们以 Кадомцев-Петвиашвили 方程为例来阐明这点. 在这种情形中的线性方程有下面形式:

$$\begin{aligned} &\alpha\psi_y + \psi_{xx} + u\psi = 0, \\ &\psi_t + 4\psi_{xxx} + 6u\psi_x + 3(u_x + \alpha w)\psi = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

我们将寻求这些方程下面形式的解:

$$\psi = \exp\left(ikx + \frac{k^2}{\alpha}y + 4ik^3t + X\right).$$

于是产生函数 X 的下面两个方程:

$$X_x = \frac{1}{z}(X_{xx} + X_x^2 + u) + \frac{1}{z}\alpha X_y, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} X_x = &\frac{1}{z}\left(u + 2X_{xx} + \frac{1}{2}X_x^2\right) \\ &- \frac{1}{z^2}\left[\frac{1}{3}X_t + \frac{4}{3}(X_{xxx} + 3X_xX_{xx}\right. \\ &\left.+ X_x^3) + 2uX_x + u_x + \alpha w\right], \end{aligned} \tag{5}$$

$$z = -2ik.$$

让我们令 z 趋于 ∞，并将 X 按 z^{-1} 幂次展成渐近级数：

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n}{z^{n+1}}, \qquad X_{0x} = u.$$

可从方程 (5) 的每一个中独立地计算出渐近级数的各个项．比较 X_1，X_2 的这些级数，可以很容易验证方程(1.5)．直接积分这些方程我们得到下面关系式：

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{\infty} u dx = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} u dx = \frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{\infty} w dx \tag{7}$$

假设当 $|y| \to \infty$ 时，$w = 0$．对关系式(7)积分，我们形式地得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint u dx dy = 0. \tag{8}$$

但很容易从(6)看出，仅当

$$\int_{-\infty}^{\infty} u dx = 0 \tag{9}$$

时，(8)中的积分才是有限的．在这种情形中，(8)表示这样一个事实：方程(1.5)存在首次积分．在 n 为偶数的情形下，比较 X_n 的表达式则产生其余的积分．假定 $n = 2, 4$，我们得到以下积分：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\iint u^2 dx dy = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial t}\iint \left[\frac{u_x^2}{2} - u^3 - \frac{3\alpha^2}{2} w^2\right] dx dy = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

积分(10)具有这样的意义，它们是用 Кадомцев-Петвиашвили 方程所描述的介质之动量与能量．其中第二个是能量积分．

当 $w=0$ 时，这些运动积分变成通常 KdV 方程的积分（参看第一章 §5）。

§3. 穿衣服方法

对(1.3)这种类型方程来说，柯西问题的解要求提出和求解算子 $L=\alpha\partial/\partial y-M$（KΠ 方程情形中的薛定谔算子）的散射正问题和逆问题. 但为了构造广泛类的特解，可以利用我们所命名的"穿衣服"方法[5]. 让我们在直线 $-\infty<x<\infty$ 上研究依赖于 t, y 的积分算子 $\hat{F}$:

$$\hat{F}\Psi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(x,z,t,y)\Psi(z)dz, \tag{1}$$

并让我们假定这种算子允许三角因子分解，即允许表示成下面形式:

$$1+\hat{F}=(1+\hat{K}^{+})^{-1}(1+\hat{K}^{-}). \tag{2}$$

式中 $\hat{K}^{+}$, $\hat{K}^{-}$ 为 Volterra 算子:

$$\pm\hat{K}\Psi=\int_{x}^{\pm\infty}K^{\pm}(x,z,t,y)\Psi(z)dz. \tag{3}$$

其次，假设微分算子 $L_0=\alpha\partial/\partial y-M_0$ 是给定的，其中

$$M_0=m_0\frac{\partial}{\partial x^n}+m_1\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}+\cdots+m_n.$$

一般来说，算子 M_0 的系数 m_i 是 x, y, t 的函数.

假设算子 $\hat{F}$ 同 L_0 对易:

$$\hat{F}L_0-L_0\hat{F}=0. \tag{4}$$

我们将关系式(4)作用于任意函数 $\Psi(x)$ 上并作 n 次部分积分，结果证实，算子 $\hat{F}$ 的核满足下面关系式:

$$\alpha\frac{\partial F}{\partial y}=M_0F-FM_0^{+}. \tag{5}$$

在关系式(5)中的 M_0^{+} 为 M_0 的共轭算子，其中

$$M_0F = \left(m_0\frac{\partial^n}{\partial x^n} + \cdots + m_n\right)F(x, z, y, t),$$
$$FM_0^+ = (-1)^n\frac{\partial}{\partial z^n}Fm_0 + \cdots + Fm_n. \quad (6)$$

从(4)得到，函数 $\Psi(x)$ 借助算子 $1+\hat{F}$ 的空间变换也使算子 L_0 保持不变：

$$(1+\hat{F})^{-1}L_0(1+\hat{F}) = L_0.$$

让我们研究 L_0 借助于算子 $1+\hat{K}^+$ 和 $1+\hat{K}^-$ 的变换 [其中 $\hat{K}^+$, $\hat{K}^-$ 为公式(2)给定的算子 $\hat{F}$ 的“三角因子”]:

$$L_0 \to L = (1+\hat{K}^+)L_0(1+\hat{K}^+)^{-1}$$
$$= (1+\hat{K}^-)L_0(1+\hat{K}^-)^{-1}. \quad (7)$$

从(7)得到，L 是微分算子（因为它同时是两面 Volterra 算子),并有下面形式:

$$L = \alpha\frac{\partial}{\partial y} - M.$$

式中

$$M = m_0\frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}} + u_1\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \cdots + u_n,$$

其中 $u_1, \cdots, u_n$ 为通过算子 $\hat{K}^+$（或者 $\hat{K}^-$）的核来表示的 x, t, y 的函数. 这些函数的公式可从下面方程得到:

$$L(1+\hat{K}^-) = (1+\hat{K}^-)L_0, \quad (8)$$

此方程是从(7)得到的. 假定 m_0, m_1 为常数，让我们引用 u_1, u_2 的公式:

$$u_1 = [m_0, \xi_0] + m_1,$$
$$u_2 = (n-1)m_0\frac{d\xi_0}{dx} + \frac{1}{2}\left\{\frac{d\xi_0}{dx}, m_0\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}[m_0, \xi_1] + u_1\xi_0 + [m_1, \xi_0], \quad (9)$$

式中

$$\xi_i(x,y,t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial z}\right)^i K(x,z,y,t)|_{z=x}. \quad (10)$$

算子 $\hat{L}$ 可以叫做算子 $\hat{L}_0$ 的用积分算子 $\hat{F}$ 来穿的“穿衣服”. 假设算子 $\hat{F}$ 还同算子 $\partial/\partial t - A_0$ 对易，其中 A_0 为关于 X 的微分算子. 于是

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial t}-A_0\hat{F}+\hat{F}A_0=0, \quad (11)$$

因此算子 $1+\hat{K}^{\pm}$ 将算子 $\partial/\partial t - A_0$ 变成 $\partial/\partial t - A$ (其中关于 X 的微分算子 A 是用(6)类型的公式同 A_0 联系起来的)，从而它们实现了算子 $\partial/\partial t - A_0$ 的穿衣服. 假设算子 $L_0=\alpha\partial/\partial y - M_0$ 和 $\partial/\partial t - A_0$ 是用 Lax 关系式(1.3)联系起来的. 于是存在一类函数 Ψ_0，对这类函数来说，下面方程组是相容的:

$$\begin{aligned} &L_0\Psi_0=0,\\ &\left(\frac{\partial}{\partial t}-A_0\right)\Psi_0=0. \end{aligned} \quad (12)$$

将关系式 (8) 以及算子 $\partial/\partial t - A$ 的相应关系式作用于 Ψ_0 上，我们得到

$$\begin{gathered} \left(\alpha\frac{\partial}{\partial y}-M\right)\Psi=0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t}-A\right)\Psi=0,\\ \Psi=(1+\hat{K}^-)\Psi_0. \end{gathered} \quad (13)$$

从(13)得到，算子 M 和 A 满足 Lax 关系式(1.3)，而它们的系数满足所研究的非线性方程系统，当然算子 M_0，A_0 的系数也满足这些方程. 因此由于穿衣服方法可按已知解构造广泛类的新解，从而它能使解“增殖”.

为了具体实行穿衣服，必须知道算子 K^+ 的核. 用算子 $1+\hat{K}^+$ 左乘(2)，并假定 $z<x$，我们得到下面的积分方程，它是 Гельфанд-Левитан-Марченко 方程的推广:

$$K^{+} + F + \int_{x}^{\infty} K^{+}(x, s, y, t) F(s, z, y, t) ds = 0. \quad (14)$$

§4. KП 方程的类孤子解

利用穿衣服方法能解决一系列问题，首先能求解([9]首先用数值方法找到）孤子解及其稳定性问题. 我们只限于研究 KП 方程.

我们仿照文献[10]，将给以下平凡解穿衣服:

$$u_0 = 0, \qquad w_0 = 0.$$

首先我们研究 $\alpha = 1$ 的情形. 这时核 F 服从下面方程:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial t} + 4\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}\right) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

这些方程的解可选作下面形式:

$$F = \sum_{1}^{N} c_n(y, t) \exp(p_n x + q_n z),$$

式中

$$c_n(y, t) = c_n(0) \exp[(q_n^2 - p_n^2) y - 4(p_n^3 + q_n^3) t]$$

及 $p_n, q_n, c_n(0) > 0$，并求解核 $K^{-}(=K)$ 的方程:

$$K + F + \int_{-\infty}^{x} K(x, z', y, t) F(z', z, y, t) dz' = 0, \quad (2)$$

我们按下面公式求 Кадомцев-Петвиашвили 方程的解:

$$u(x, y, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, z, y, t). \quad (3)$$

因为方程(2)的核是退化的，所以它的解并不难求，并有下面形式（比较第一章 §3):

$$K(x, z, y, t)|_{z=x} = -\frac{\partial}{\partial x} \ln \det A,$$

式中矩阵A乃是$N \times N$方阵,其阵元为

$$A_{nm} = \delta_{nm} + c_n(y, t) \frac{\exp[(p_n + q_m)x]}{p_n + q_m}. \tag{4}$$

因此,解 $u(x, y, t)$ 为

$$u(x, y, t) = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A. \tag{5}$$

公式(4),(5)描述N个一维孤子的相互作用. 特别是,当令$N = 1$时,我们只有一个孤子:

$$u = \frac{(p+q)^2}{2} \times \mathrm{ch}^{-2}$$

$$\frac{(p+q)x + (q^2 - p^2)y - 4(p^3 + q^3)t + \ln \frac{c(0)}{p+q}}{2}, \tag{6}$$

当$p = q$时,此孤子变成熟知的KdV方程的孤子. 当 $p \neq q$ 时,孤子在与x轴成某一角度下运动. 显然,在一般情形下,解(4),(5)一方面描述这类"斜"孤子的相交,同时也描述当x, $y \to \infty$时,在 $x/y = p_n - q_n (n = 1, \cdots, N)$ 方向上它们不衰减. 我们感兴趣的乃是在所有方向皆衰减的孤子的存在问题及它们的相互作用动力学. 结果表明,仅当$\alpha^2 < 0$时, KΠ方程才存在这种孤子. 我们借助于解(4),(5)的特有退化,得到这种孤子的显示表达式; 为此事先要注意到, 在KΠ方程中, α^2符号的改变等价于解从y为实到纯虚的延拓, 也即等价于在诸公式中作下面代换: $\alpha^2 \to -\alpha^2$, $y \to iy$.

为过渡到解(4),(5)的退化情形,采用下面表示是方便的: $p_n + q_n = \kappa_n$, $p_n - q_n = \nu_n$, $c_n(0) = -a_n\kappa_n$. 其次我们将矩阵$A(4)$重新写成下面形式:

$$A_{nm} = \exp\left(-\frac{\kappa_n - \kappa_m}{2} x + \frac{\nu_n - \nu_m}{2} x\right) B_{nm}, \tag{7}$$

其中

$$\tilde{B}_{nm} = \delta_{nm} - \frac{2a_n\kappa_n}{\nu_n - \nu_m + \kappa_n + \kappa_m}$$

$$\times \exp\{\kappa_n[x - \nu_n y - (3\nu_n^2 + \kappa_n^2 t)]\}. \qquad (8)$$

因从 A 到 B 的变换 (7) 是相似变换，所以我们得到 $\det A = \det B$，并且代替(5)得到

$$u(x, y, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det B.$$

现在让我们过渡到极限：$\kappa_n \to 0$，并假定

$$u_n = 1 - \xi_n\kappa_n + O(\kappa^2).$$

结果我们得到 B 的行列式：

$$\det B = \prod_n(-\kappa_n)\det\tilde{B} + O(\kappa^{N+1}),$$

式中矩阵 $\tilde{B}$ 有下面形式(作代换 $y \to iy$ 之后)：

$$\tilde{B}_{nm} = \delta_{nm}(x - i\nu_n y - \xi_n - 3\nu_n^2 t) + (1 - \delta_{nm})\frac{2}{\nu_n - \nu_m}. \qquad (9)$$

(当 $n = m$ 时,等式右边后一项应取作零.)显然，

$$u(x, y, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det\tilde{B} + O(\kappa).$$

现在假定 $\kappa = 0$，我们得到

$$u(x, y, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det\tilde{B}. \qquad (10)$$

当变元为实值时,在 ν 和 ξ 的某一选择下,这种解即可以得到实数性也可以得到正则性. 例如，在 $N = 2$ 的情形下，当 $\nu_2 = -\bar{\nu}_1$，$\xi_2 = \xi_1$ 时,从(9)我们得到

$$\det\tilde{B} = 4(\nu_1 + \bar{\nu}_1)^{-2} + |x - i\nu_1 y - \xi_1 - 3\nu_1^2 t|^2. \qquad (11)$$

此表达式是严格正的,即由公式 (10) 确定的函数 $u(x, y, t)$ 是实的且有界. 当 $x^2 + y^2 \to \infty$ 时,解 $u \backsim (x^2 + y^2)^{-1}$，即

在 x, y 平面内，这种解在所有方向上都衰减．这种解乃是以速度 $v=(v_x, v_y)$ 运动着的二维孤子：

$$\sigma_x = 3|\nu_1|^2, \quad \sigma_y = -6\mathrm{Im}\nu_1.$$

在一般情形下，如果 $N=2K$，而常数 ν_n 和 ξ_n 满足下面关系式

$$\nu_{K+n} = -\bar{\nu}_n, \quad \xi_{K+n} = \xi_n, \quad n=1,\cdots,K, \tag{12}$$

(其中在复数 $\nu_1,\cdots,\nu_K$ 集合中间没有相重的)则解(9),(10)是实的和非奇异的．这些条件保证了矩阵 $\tilde{B}$ 的正定性．证明它们完全是代数上的基本事实，我们略去．

所构造的解(9),(10),(12)描述 K 个二维孤子的碰撞，即当 $t\to\pm\infty$ 时，这种解等于解(10),(11)之和．当 $t\to\pm\infty$ 时，将解的渐近值看成 x_0, y_0 的函数，其中

$$x = x_0 + v_x^{(m)}t, \qquad y = y_0 + v_y^{(n)}t,$$

那么很容易看出，相应的量 $\xi_n^{\pm}$ 相同：$\xi_n^+ = \xi_n^- = \xi_n$．在一维问题中，孤子的相移总是存在的并且是熟知的；但在二维孤子的碰撞中，孤子的相移恒等于零[10]．值得注意的事实是，KП 方程有理解的极点动力学是用熟知的 Moser-Calogero 系统来描述的(参看下面 §7)．

§5. 依赖于函数参数的精确解

把穿衣服方法应用到二维方程，使我们除了能得到孤子解外，还能得到包含任意单变量函数的精确解的集合[5]．作为一个例子，我们来研究 $\alpha^2<0$ 的 KП 方程，并用 $i\partial/\partial y$ 代替 $\partial/\partial y$ 之后，我们把系统(4.1)重写成下面形式：

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial t} + 4\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial z^3}\right) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

让我们把此系统的解选作下面形式：

$$F(x, y, z, t)=\varphi(x, y, t)\bar{\varphi}(z, y, t), \tag{2}$$

其中函数 φ 满足下面方程：

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}+4\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}=0. \tag{3}$$

因而函数 $\varphi(x, y, t)$ 是由任意初始条件 $\varphi(x, 0, 0)$ 来确定的．我们从 φ 得到方程(4.2)的解(核 F(2) 仍然是退化的)：

$$K(x, z, y, t)=-\frac{\varphi(x, y, t)\bar{\varphi}(z, y, t)}{1+\int_{-\infty}^{x}|\varphi(z, y, t)|^2dz}. \tag{4}$$

很容易从(4)看到，这时选取系统(3)之解的唯一边界条件乃是当 $x\to-\infty$ 时衰减足够快的 $\varphi(x, y, t)$ (也就是说,对任意 $s<\infty$ 来说，$\varphi\in\mathscr{L}_2(-\infty, s)$)．例如,如果积分区域 D 整个都位于 k 的下半平面的话，那么任意下面形式的函数满足此条件：

$$\varphi=\iint_D c(k_1, k_2)e^{ikx-ik^2y+4ik^3t}dk_1dk_2(k=k_1+ik_2) \tag{5}$$

其中 $c(k_1, k_2)$ 为任意两个变量的可积函数;通过 φ 来确定函数 $c(k_1, k_2)$ 并不是唯一的;按照 (4.3)，用下面公式给出 KП 方程的相应解：

$$u(x, y, t)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(1+\int_{-\infty}^{x}|\varphi(z, y, t)|^2dz\right), \tag{6}$$

可以把解(5)，(6)看成是单个孤子解(4.6)的推广．单个孤子解相应把 $c(k_1, k_2)$ 选为二维 δ 函数形式：

$$c(k_1, k_2)=c\delta(k_1-a_1)\delta(k_2+a_2), \quad a_2>0.$$

同样不难将N个孤子解(4.4)，(4.5)加以推广．为此只需将核 F 选为下面形式：

$$F = \sum_{1}^{N} \varphi_i(x, y, t)\bar{\varphi}_i(z, y, t), \tag{7}$$

式中 φ_i 为具有相应 $c_1(k_1, k_2)$ 的形如(5)的函数. KΠ 方程的解为

$$u(x, y, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det A, \tag{8}$$

$$A_{nm} = \delta_{nm} + \int_{-\infty}^{x} \varphi_n(z, y, t)\bar{\varphi}_m(z, y, t)dz. \tag{9}$$

$u(x, y, t)$ 的实数性保证了矩阵 $A(9)$ 的自共轭性.

假定

$$\varphi = ce^{kx+ik^2y-4k^3y} + \int_0^k a(\xi)e^{\xi x+i\xi^2y-4\xi^3t}d\xi, \tag{10}$$

不难看出,公式(6)给出的 $u(x, y, t)$, 当 $t\to-\infty$ 时乃是通常的孤子. 不过细心分析一下表达式(10), (6)表明, 在 $t\to+\infty$ 的渐近式中, 没有孤子(如果 $a(\xi)$ 没有 δ 形式奇异性的话). 这样一来, 相应(10)的解描述孤子的湮灭. 因此这种解乃是下面熟知事实的极漂亮的说明: 当 $\alpha^2<0$ 时, KΠ 方程的平面孤子是不稳定的(参看 [11]). 下面还将讨论一下依赖于任意函数的一类解(参看下面 §8), 这类解将用另外一种方法得到.

§6. 黎曼曲面方法. 一秩有限带解

KΠ 方程的相当广泛一类解是作为薛定谔方程的有限带周期性势和准周期性势及 KdV 方程解等理论的推广而得到. 这种理论是在第二章发展起来的. 我们将从亏格 $g\geq1$ 的代数黎曼曲面 Γ 之 "Baker-Axuezep 标量函数" ψ 的概念开始, 在此曲面上标上点 P_0 (常常称之为"无穷远点"). 靠近 P_0 点, 我们给定局部坐标 $z=k^{-1}$ (在 P_0 点 $z=0$). 让我们研究这样的一个函数 $\psi(x, y, t, P)$, 它依赖于曲面 Γ 的点 P 以及参数

x, y, t, 并且具有这样一些性质：当 $P \neq P_0$ 时，函数 ψ 是亚纯的；在 Γ 上 ψ 有 g 个一阶极点 $\gamma_1, \cdots, \gamma_g$，这些极点的位置与 x, y, t 有关；当 $k \to \infty$（或 $P \to P_0$）时，ψ 有下面形式的渐近形式：

$$\psi = \exp\{kx + \alpha_n(k)y + \beta_n(k)t\}\left(1 + \sum_{i>1} \xi_i(x, y, t)k^{-i}\right), \tag{1}$$

式中 $\alpha_n(k)$, $\beta_m(k)$ 是幂次分别为 n、m 的多项式。这种函数 ψ 同第二章 §4 中的布洛赫函数 ψ 类似，它是唯一的并且可用经典 θ 函数理论写出它的精确公式(参看综合评述 [12] 中的附录 3 及文献[13]). 为了寻求形如(1.3)方程的解，根据以下事实来利用函数 ψ[14]. 在上面所指出的函数 ψ 的解析性质条件下，用下面两个与 P 无关的标量线性算子将 ψ 零化：

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - M\right)\psi = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right)\psi = 0, \tag{2}$$

式中 M 和 A 为关于 x 的 n 阶和 m 阶微分算子，这些算子的相应系数仅仅与 x, y, t 有关而与 P 无关.

对所有 P 来说，从(2)得到，(1.3)是成立的：

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} - M, \quad \frac{\partial}{\partial t} - A\right] = 0. \tag{3}$$

当 $n = 2$, $m = 3$ 时，(按照(1.4)—(1.6))我们得到 KΠ 方程(1.5)，其中 ψ 同势 $u(x, y, t)$ 的关系也同第二章 §6 中一样*) 有下面形式：

$$u(x, y, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\xi_1(x, y, t), \tag{4}$$

式中 $\xi_1(x, y, t)$ 为公式(1)的展开式系数. 与 $u(x, y, t)$ 有关的公式乃是第二章(9.13)公式的推广(按照(8.10)来选取系

---

*) 应同第一章 §5 中一样. ——译注

数):

$$u(x, y, t) = -2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(Ux + Vy + Wt + U_0) + \text{const.} \tag{5}$$

对亏格 $g=1$ 来说，这些解是退化的．当 $g=2$ 时，解(5)乃是形如 $u(x-at, y-bt)$ 的"极浅水波"形式．如果 Γ 是任意亏格 $g\geqslant 1$ 的超椭圆黎曼曲面，而 $P_0=\infty$ 为支点，那么 $V=0$．我们得到第二章所描述的 KdV 的解．如果黎曼曲面 Γ 有下面形式:

$$w^3 + \varphi_1(E)w + \varphi_2(E) = 0 \tag{6}$$

而点 $P_0=\infty$，那么 $W=aU+bV$．变换

$$u' = u + 2\beta, \qquad w' = w - 2\alpha u + \text{const},$$

$$x' = x + 2\alpha y + 3(\alpha^2+\beta)t,$$

$$y' = y + 3\alpha t, \qquad t' = t$$

在下面的归一化(8.10)条件下保持 KП 方程不变，并把 KП 的极浅水波简化为 KП 方程的与 t 无关的解．在解(5)中，这种变换相当于局部坐标 $z=k^{-1}$ 的代换．从解(5)作极限过渡可以得到有理函数解 $u(x, y, t)$．这类解在上面 §4 中已经讨论过；它有特殊的意义，因此下节我们还将讨论它．有理解是用下面形式的椭圆函数解的退化性得到的:

$$u(x, y, t) = 2\sum_{i=1}^{n}\wp(x - x_i(y, t)), \tag{7}$$

这种解乃是第二章 $n=3$ 时解(10.13)以及 $n=1$ 时极浅水波的推广．在此情形中，详细计算没有作过．

回到 Baker-Ахиезер 函数 ψ 时，可以指出一种情况．让我们研究这样一种情形，即公式(1)中的多项式 $\alpha_n(k)$ 是函数 $f(P)$ 关于 $k=z^{-1}$ 之展开式的主部 $[f]$，其中函数 $f(P)$ 是曲面 Γ 上的某一代数函数并且在点 $P_0(z=0)$ 处它有唯一的极

点．这时函数 ψ 可以用下面形式找到

$$\psi(x, y, t, P) = \exp\{f(P)y\}\psi_0(x, t, P). \tag{8}$$

关于 y 的方程(2)，这时具有下面形式：

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = f(P)\psi = M\psi. \tag{9}$$

正是由于这一点，算子 M, A 的系数将不依赖于变量 y，这是因为这些系数是用 ψ_0 来表示的．从而方程(3)转化为 Lax 表象．

除此以外，如果多项式 $\beta_m(k)$ 同样是类似的代数函数 $g(P)$ 的主部，那么(2)的两个方程将有下面形式：

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = M\psi = f\psi, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = g\psi = A\psi, \tag{10}$$

或者

$$[M, A] = 0. \tag{11}$$

因此我们得出如下结论：具有标记点 P_0 和代数函数对儿 f, g（其中这两个函数在点 P_0 处有唯一的极点，其阶数分别为 m, n）的黎曼曲面 Γ，生成一对儿对易算子 M, A．M, A 这两个算子的系数可用 θ 函数来表示（参看 [13]）．对易算子对儿 M, A 的分类问题，早在本世纪 20 年代就已经提出过，并且解决了一部分，尽管效果不够完善（参看 [15—17]）．如果用现代语言说出这些原文的要点，则可陈述如下：a）所指出的结构总是产生对易算子的环，环的基底 M, A 依赖于有限个参数；b）反之：如果算子 M, A 的阶数 m 和 n 彼此是互质的，那么由上面所引入的结构可得到对易算子 M, A．文献 [13, 14] 找到了系数的显式公式，并且还确定了所构造出的一般情形的算子 M, A 乃是 x 的周期性和准周期性函数，同时对易性方程成为其系数的关于 x 的完全可积的哈密顿系统（参阅综合评述[18]）．当然，用所描述的方法可以构造对易

算子 M、A 的许多例子，并且它们的阶数甚至彼此不是互质的，即 m 和 n 这两个数可用 l 整除. 不过，早在 20 年代就指出过，这种结构不能给出完备的分类. 对易算子 M，A 总是存在共同的本征函数:

$$M\psi = \lambda\psi, \qquad A\psi = \mu\psi. \tag{12}$$

同时用确定某一个黎曼曲面的方程将 λ 和 μ 联系起来:

$$F(\lambda, \mu) = 0 \longleftrightarrow F(M, A) = 0. \tag{13}$$

如果在黎曼曲面每一点上，本征函数 $\psi = \psi(x, \lambda, \mu)$ 都是单值的，那么在

$$\psi(x, \lambda, \mu) = \psi(x, 0, 0, P) \tag{14}$$

(式中 P 为曲面 Γ 上的点)情形下，这种本征函数就等于上面所构造的 Baker-Ахиезер 函数.

这种结构的重要特殊性质是，共同本征函数 ψ 是单重的. 一般来讲，对曲面 Γ 的全部点 P 来说，这种本征函数可以是 l 重的. 数 l 称作对易对儿 M，A 的“秩”. 可以证明，数 l 一定是 m，n 这两个阶数的最大公约数.

如果 m 和 n 互为质数，那么一定有 $l = 1$，如果 m 和 n 不是互质的，则可能 $l > 1$. 对于 $l > 1$ 的情形，这种研究实质上更加复杂(参阅 [19—21]). 结果依赖于函数参数，因此不能化成 θ 函数. 构造 l 秩的对易算子的技术可以用来构造 KП 方程的解的问题. 我们将把这种解叫做“l 秩的有限带”解. 作为一个例子，让我们指出一个秩数 $l = 2$ 的最简单的非退化对易算子对，这两个算子的阶数分别等于 4 和 6:

$$M = L_4 = L_2^2 + c_x(\wp(c+a) + \wp(c+b))\frac{\partial}{\partial x} + \\ + \wp(c+a) - \wp(c+b), \tag{15}$$

式中 $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $2A = L_2^3 + D$, $L_2 = \partial^2/\partial x^2 + u(x)$, D 为三阶算子(我们没有明显写出这种算子). 用公式

(8.21)(式中 $y=t=0$)(参看下面)将任意函数 $c(x)$ 同 $u(x)$ 联系起来. 用亏格 $g=1$ 的代数关系式,将算子 $L_4=M$ 和 $L_6=A$ 联系起来:

$$A^2=4M^3+g_2M+g_3, \tag{16}$$

由此不难找到算子 D.

公式(15)所指出的秩数等于 2 的对易算子, 已被文献[21]采用.

让我们提醒一下,早在 20 年代就已经知道的 1 秩的最简单非平凡对易对儿有 2 阶和 3 阶. 它们指出了同第二章 §1 中的 KdV 之经典"极浅水波"之间的联系, 其中对 KdV 来说, $L_2=\partial^2/\partial x^2+2\wp(x)$ 为拉梅算子.

§7. KΠ 方程的有理解. 直线上粒子的分立系统

正象上面已经谈到的那样, KΠ 方程具有这样的有理的"弱定域化"的解 $u(x, y, t)$, 即这种解在所有实的 x, y, t 的情形下没有奇异性,并且当 $x^2+y^2\to\infty$ 时, 以 $(x^2+y^2)^{-1}$ 形式衰减(参看 §4). 这种形式的最简单解是"二维孤子"(4.11), 这种孤子仅仅在 1976 年首先由数值计算的结果发现的[9].

更普遍的有理解由公式(4.10)给出. 结果是,对 KΠ 方程来说, 当 $|x|\to\infty$ 时衰减的普遍有理解(在 x, y, t 为实的情况下,这种解也可能有极点)同样用公式(4.10)来描述. 解(4.10)写成另外一种形式是:

$$u(x, y, t)=-2\sum_{j=1}^{n}[x-x_j(y, t)]^{-2}, \tag{1}$$

式中极点 x_j 的位置是 y, t 的函数. 若事先不作这种假定,可以证明, 形如(1)的解将对所有变量 x, y, t 都是有理的. 解(1)具有一些令人惊异的性质.

下面让我们研究在一条直线上的粒子系统，这些粒子的坐标为 p_i, x_i 而相互作用的哈密顿量为

$$H(x, p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i<j} \frac{2}{(x_i - x_j)^2} \tag{2}$$

(“Moser 系统”). 让我们提醒一下文献[22] 的结果. 我们用 τ 来表示时间. 让我们定义两个矩阵:

$$L = (l_{ij}), \qquad A = (a_{ij});$$

$$l_{ij} = p_j\delta_{ij} + \frac{2(1 - \delta_{ij})}{x_i - x_j}, \tag{3}$$

$$a_{ij} = \frac{2(1 - \delta_{ij})}{(x_i - x_j)^2} - \sum_{s \neq j} \frac{2\delta_{js}}{(x_j - x_s)^2}, \quad a_{ii} = 0.$$

哈密顿系统(2)可表示成下面形式:

$$L_\tau = [L, A]. \tag{4}$$

特别是，我们有

$$\mathrm{Sp}L = 0, \quad \mathrm{Sp}L^2 = H = F_2, \quad \mathrm{Sp}L^i = F_i(x, p). \tag{5}$$

积分 $F(x,p)$是对合的，并且系统(2)是完全可积的. 由于积分 $H=F_2$ 和 F_3 的对合性，相应的哈密顿系统作为相空间 (x, p) 的变换群是对易的. Кричевер 曾发现[23]同 КП 方程颇有兴趣的联系. 在相空间 $(x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)$ 中，我们将研究具有哈密顿量为 $H = F_2$ 和 F_3 的流的双参数轨道:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1} &= \frac{\partial F_2}{\partial p_i}, & \frac{\partial p_i}{\partial \tau_1} &= -\frac{\partial F_2}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2} &= \frac{\partial F_3}{\partial p_i}, & \frac{\partial p_i}{\partial \tau_2} &= -\frac{\partial F_3}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{6}$$

从而确定出函数 $x_i(\tau_1, \tau_2)$, $p_i(\tau_1, \tau_2)$. 让我们作一下对比:

$$\tau_1 \to y, \qquad \tau_2 \to t. \tag{7}$$

重要命题 (Кричевер 定理). 当

$$u = -2 \sum_{i=1}^{n} [x - x_i(y, t)]^{-2}$$

时，得到形如(4.10)的解，其中极点 x_i 相对于 $y=\tau_1$ 的运动是借助于具有哈密顿量 $H=F_2$ 的系统(2)，而相对 $t=\tau_1$ 的运动是借助于哈密顿量为 F_3 的系统. 这种解乃是 x 的全部有理解，当 $|x|\to\infty$ 时，这种解是衰减的. 所叙述的这一命题乃是一系列研究的最终结果. 早在 1974 年就找到了 KdV 的最简单的非简并双带解，这种解可化成椭圆函数，并且存在带有非线性关联位相的三个极浅水波之和的形式[24]:

$$u(x, t)=2\wp(x-a(t))+2\wp(x-b(t))\\ +2\wp(x-c(t)).$$

其中，a、b、c 的形式由第二章 §10 中给出(参看第二章公式(10.13))。这些解可简并为 x 的有理解，这是因为维尔斯特拉斯函数 $\wp(x)$ 可简并成 x^{-2}. 其次，在[25]中曾发现了，KdV 的有理解同直线上的粒子系统 (2) 之间的内在联系并找到了当 $|x|\to\infty$ 时衰减的全部有理解. 所有这些解都是有限带解的简并化并有下面形式:

$$u(x, t)=-\sum_{j=1}^{n} 2[x-x_j(t)]^{-2}, \quad n=\frac{d(d+1)}{2}. \qquad (8)$$

同粒子系统的关系是这样的: 形如(8)的函数 $u(x, t)$ 当且仅当在下面条件下才能满足 KdV 方程: a) $2n=d(d+1)$; b) 集合 $[x_1(t_0), \cdots x_n(t_0), p_1(t_0), \cdots p_n(t_0)]$ 乃是哈密顿量(2)的稳定相点，即 $\operatorname{grad}H=0$; c) 关于变量 t，量 $x_j(t)$ 乃是具有哈密顿量 $F_3(x, p)$ 的哈密顿系统的解.

过了不多久，在[26]中也得到了这些结果，同时在[26]中把分立动力系统同解 $u(x, t)$ 的极点运动之间的联系照搬到 Burgers-Hopf 方程中去，并且就有关这种联系的问题本身从更普遍的角度作了讨论. 最后，在综合评述[18]中(参看文中的最后评注)，给出了上面提到过的关于 KП 方程形如 (1) 的解的定理，这一定理是开拓文章 [25，26] 的自然归宿.

实际上，如果 KП 方程形如(1)的解 $u(x, y, t)$ 与 y 无关的话，那么这种解就归结为 KdV 的解．由于 Кричевер 定理，这也就等于说相点 (x, p) 应是哈密顿量(2)的稳定点．不过这种说法仅当满足等式 $2n = d(d+1)$ 时才成立．这样一来，对于同 y 无关的解来说，Кричевер 定理便归结为文章 [25, 26] 的结果．构造有理解 (8) 乃是上面论述的用 Baker-Ахиезер 函数来构造 KП 方程解的程序的自然退化．黎曼曲面 Γ 乃是该情形中的坐标为 k、点 $P_0 = \infty$ 的有理曲面(黎曼球面)．Baker-Ахиезер 函数寻求为下面形式:

$$\psi(x, y; t, k) = \left[1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j(y, t, k)}{x - x_j(y, t)}\right] e^{kx + k^2 y + k^3 t}, \quad (9)$$

式中 a_j 对于 k 是有理的．在这种情形中，依照普遍公式(6.4)按函数 ψ 所求出的函数 $u(x, y, t)$ 具有(8)这种形式．如果 ψ 用标量线性算子(6.2)加以零化，那么这种函数满足 KП 方程．计值结果表明，当且仅当矩阵(3)满足方程(4)时，函数 ψ 才能被算子 $\partial/\partial y - M$ 加以零化．从而极点 x_j 的集合借助于 (2) 依赖于 y．当且仅当极点 x_j 关于 t 的运动是借助于具有哈密顿量为 $F_3(5)$ 的哈密顿系统时，函数 ψ 才能被算子 $\partial/\partial t - A$ 加以零化．

§8. 在黎曼曲面上面全纯向量的纤维表示方法．精确解中的函数参数

KП 方程拥有广泛一类依赖于若干数量的任意单变量 x 函数的精确解．其中一类，在 §5 中曾描述过，它是从“穿衣服方法”得到的．这里我们还将写出一种获得精确解的方法，其中这些精确解仍然是含有任意单变量 x 的函数．这种方法乃是 §6 中所描述的黎曼曲面方法的进一步发展．

和在 §6 中一样(参看上面)，让我们来研究亏格 $g \geq 1$ 的

黎曼曲面Γ，它的标记点为P_0，并且在P_0附近的局部坐标$z=k^{-1}$. 我们的目的是构造§6中所描述的类似于向量的Baker-Ахиезер ψ函数，$\psi=\psi^q(x, y, t, P)$，其中 $q=1,\cdots,l$. 让我们给出具有下面这样一些性质的$(l\times l)$矩阵$\psi_0(x,y,t,k)$:

a) $A_i=\frac{\partial\psi_0}{\partial x_i}\psi_0^{-1}=A_i(x, y, t, k)$为$k$的多项式.

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_i}=[A_i, A_j], \quad x_1=x, \quad x_2=y, \quad x_3=t, \tag{1}$$

b) $\psi_0(x_0,y_0,t_0,k)\equiv 1$.

我们给出曲面Γ上的点集$\gamma_1,\cdots,\gamma_{Lq}$和下面的$(l-1)$维向量集:

$$\alpha_1=(\alpha_{1,q}),\ \alpha_2=(\alpha_{2,q}),\cdots,\alpha_{lq}=(\alpha_{lg,q})$$

我们将构造这样一个向量函数$\psi(x, y, t, P)$，使得它在点$\gamma_1,\cdots,\gamma_{lg}$处存在同$x, y, t$无关的一阶极点. 我们用$\varphi_j^q(x,y,t)$来表示分量$\psi^q(x, y, t, P)$在极点$\gamma_j$处的留数. 我们要求,对于一定的$j$，所有$l$个留数$\varphi_j^q(x, y, t)$同它们的其中之一即$\varphi_j^l$成比例,其比例系数$\alpha_{jq}$是与$x,y,t$无关的常数:

$$\varphi_j^q(x, y, t)=\alpha_{jq}\varphi_j^l(x, y, t). \tag{2}$$

当$P\to P_0$(或$k\to\infty$)时，我们要求向量$\psi(x, y, t, P)$有下面渐近式:

$$\psi(x, y, t, P)=\left(\xi_0+\sum_{j\geq 1}\xi_j(x, y, t)k^{-j}\right)\psi_0, \tag{3}$$

式中$\xi_0=(1, 0, 0,\cdots)$，而其余的$\xi_j(x, y, t)$为向量. 这种向量函数$\psi(x, y, t, P)$唯一地被所指出的解析性质所确定. 构造这种函数归结为奇异积分方程组的解(参看[19, 20]). 仿照[20],为了构造KП方程的解,我们按以下方式来

选择矩阵 $A_i = \psi_{0x_i}\psi_0^{-1}$:

$l=1$ 的情形. 这种情形上面曾研究过,那里曾假定

$$A_1 = k, \quad A_2 = k^2, \quad A_3 = k^3. \tag{4}$$

更普遍的是下面形式:

$$A_1 = k, \qquad A_2 = k^2 + p(t),$$

$$A_3 = k^3 + \frac{3}{2} kp(t) + y\ \frac{dp}{dt}.$$

$l=2$ 的情形. 当 $l=2$ 时,我们给出矩阵 A_i:

$$A_1 = \psi_{0x}\psi_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+u_0 & 0 \end{pmatrix} = \kappa + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \psi_{0y}\psi_0^{-1} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \kappa^2,$$

$$A_3 = \psi_{0t}\psi_0^{-1} = \kappa^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P & 0 \end{pmatrix} k + q, \tag{5}$$

式中 q 是与 k 无关的矩阵. 我们从相容性条件求出, $u_0 = u_0(x,t)$ 与 y 无关,并满足 KdV 方程(在关于 p 和 q 的某些关系下):

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \frac{1}{4}\left(-6u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}\right); \tag{6}$$

$$p = \frac{u_0}{2}, \qquad q = \begin{pmatrix} \dfrac{u_{0x}}{4}, & -\dfrac{u_0}{2} \\ \dfrac{u_{0xx}}{4} - \dfrac{u_0^2}{2}, & -\dfrac{u_{0x}}{4} \end{pmatrix}.$$

对 $l=2$ 来说,这就给出构造 ψ_0 的可能性.

$l \geqslant 3$ 的情形. 让我们给出具有下面形式的矩阵 A_1:

$$A_1 = \kappa + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ u_0 & u_1 & \cdots u_{l-2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$A_2 = \kappa^2 + p, \quad A_3 = \kappa^3 + q, \quad \kappa^l = k \cdot I,$$

式中 p 和 q 为与 k 无关的矩阵.

在 $l = 3$ 的情形下，我们假定 $q = 0$. 我们从条件(1)求出 $u_0, \cdots, u_{l-2}$. 当 $l = 3$ 时,这些条件归结为下面事实：两个函数 u_0, u_1 与 t 无关,而在 p 和 q 的某些关系下,即

$$q = 0, \quad p = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}u_1 & 0 & 0 \\ u_0 - \frac{2}{3}u_1 & \frac{u_1}{3} & 0 \\ +u_{0x} - \frac{2}{3}u_{1xx} & u_0 - \frac{u_{1x}}{3} & \frac{u_1}{3} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

函数对儿 u_0, u_1 满足关于 x, y 的 Boussinesq 方程(即与 t 无关的 KП 方程). 由此得到 $l = 3$ 情形的矩阵 ψ_0 的形式. 对所有 $l \geqslant 2$ 的情形来说,在最简单的例子中(这些例子绝对不是平凡的)可以假定

$$A_1 = \kappa, \quad A_2 = \kappa^2, \quad A_3 = \kappa^3. \tag{9}$$

如果矩阵 A_1, A_2, A_3 选作(4)—(7)的形式，那么所有向量函数 $\psi(x, y, t, P)$ 被下面形式的标量线性算子零化:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - M\right)\psi = 0, \quad -M = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right)\psi = 0, \tag{10}$$

$$-A=-\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{4}\left(u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}u\right)+\frac{3}{4}w.$$

所以由于(10)，(u, w)对儿满足用标度变换可化成(1.4)形式的KП方程.

这样一来，我们得到构造KП方程精确解的一种方法，这些精确解是由下面集合来确定的:

a）具有标记点 $P_0=\infty$ 及靠近 P_0 处局部参数为 $z=k^{-1}$ 的黎曼曲面 Γ;

b）曲面 Γ 上的点集 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{lq}$ 以及 $(L-1)$ 维向量集 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{lg}$;

c）矩阵 A_1, A_2, A_3，这些矩阵是由若干数量的 x 的任意函数来确定的，它们对 y, t 的依赖关系由相容方程(1)来确定.

让我们重新研究 $l=1$ 的情形. 从形如(4)的矩阵 A_i 所得到的KП方程的所有解，归结为这样一些解，即用变换

$$\begin{aligned} u' &= \mu(t)+u\left(x-\frac{3}{2}\nu(t), y, t\right), \\ w' &= w+\frac{4}{3}y\frac{d\mu}{dt}, \quad \frac{d\nu}{dt}=\mu(t), \end{aligned} \tag{11}$$

在常数 $A_i=k^i$ 情形下，这种解是已经研究过的. 变换(11)拥有下述性质: 它把KП的解转变成对任何函数 u, w 而言的KП的解.特别是，由此还得到，为了切合(数学上的确切性)所提出的柯西问题，必须在所有 y 的情况下，使函数 u、w 保持有界.

更感兴趣的是 $l=2$ 的情形. 当 $l=2$ 时，集合 A_i 是由KdV方程的一个解 $u_0(x, t)$ 来确定的.

当 $l=3$ 时，集合 A_i 是由关于变量 $x, y, u_1=v_x, 2u_0-u_{1x}=v_y$ 之 Boussinesq 方程(即与 t 无关的KП方程)的一个

解 $V(x, y)$ 来确定的.

其次,如果所有函数 u_i 恒等于零的话,那么得到的 KΠ 方程之解实质上将是所有三个变量 x, y, t 的函数.

让我们研究最初的简并情形,Γ 在这种情形中存在"二重点"类型的奇异性,$A_1=\kappa$, $A_2=\kappa^2$, $A_3=\kappa^3$, $u_0\equiv 0$. 向量 $\psi(x, y, t, k)$ 有下面形式:

$$\psi=\left(\xi_0+\sum_{j=1}^{N=lg}\frac{a_j(x, y, t)}{k-\gamma_j}\right)\psi_0,$$

$$\psi_{0x}\psi_0^{-1}=A_1, \tag{12}$$

$$\psi_{0y}\psi_0^{-1}=A_2, \qquad \psi_{0t}\psi_0^{-1}=A_3;$$

式中 $\xi_0=(1, 0, \cdots, 0)$ 及 $a_j=(a_{j1}, \cdots, a_{jl})$ 皆为向量. 同样给定 $(l-1)$ 维向量集: $\alpha_1, \cdots, \alpha_{lg}$. 对于解 $u(x, y, t)$ 来说,从(10)应得到下面公式:

$$u(x, y, t)=-2\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{s=1}^{N}a_{sL}\right). \tag{13}$$

在"二重"点 $\kappa_{r1}\sim\kappa_{r2}$ 处,我们要求满足下面等式:

$$\psi(x, y, t, \kappa_{r1})=\psi(x, y, t, \kappa_{r2}),$$

$$r=1, 2, \cdots, g. \tag{14}$$

对留数条件得到下面形式

$$\sum_{i=1}^{l}a_{si}\psi_0^{ij}=\alpha_{sj}\sum_{i=1}^{l}(a_{si}\psi_0^{il}). \tag{15}$$

如果给定矩阵 $\psi_0(x, y, t, k)$, 那么线性方程(14), (15)唯一地确定出 ψ. 在 $l=2$ 的最简单情形中 $(A_i=\kappa^i)$, 可以将 ψ_0 取作下面形式:

$$\psi_0=e^{-ky}\begin{pmatrix}\cos\theta & k^{-1/2}\sin\theta\\ -k^{1/2}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \tag{16}$$

式中 $\theta=k^{1/2}(x+kt)$.

对 $g=1$, $l=2$ 的情形,可以这样选取参数 κ_{rj}, γ, α, 使

得产生关于 x, y, t 的周期性解 $u(x, y, t)$,并且在 $|y|>y_0$ 的半平面上，这种周期性解对所有 x, t 之值都不存在奇异性. 显然，当 $g=1$, $l=2$ 时,在 x、t 为实的情形下，构造的全部解都有奇异性. 对 $g>1$ 的情形，类似的分析没有作过. 这种分析可能带来一定程度的计算性质上的困难，但所有问题可用初等函数求解.

黎曼曲面 Γ 没有奇异性的情形困难更大. 根据文章[19]的图象，计算类似向量的 Baker-Ахиезер 函数归结为圆周上奇异积分方程系统的解，并且很明显不能化简. 由于这个原因，文章[20]采用另外一种方法来计算 KП 方程的解 $u(x, y, t)$，这种方法乃是关于布洛赫函数 ψ 的极点 $\gamma_1, \cdots, \gamma_g$ 之方程（即在第二章 §4, §5 中所得到的这种方程）的推广. 我们还要注意到,在上面确定出的类似向量的 Baker-Ахиезер 函数 ψ 中，也同第二章 §4, §5 中的薛定谔算子之布洛赫本征函数 ψ 一样，含有"归一化点"(x_0, y_0, t_0). 将这种归一化点加以变形,就可以得到量 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{lg}$ 以及 $(l-1)$ 维向量集 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{lg}$ 对参数 x_0, y_0, t_0 的依赖关系. 这种依赖关系由常微分方程确定，其中 γ, α 以及量 $u(x, y, t)$ 本身包含在这种方程的右边. 在 $g=1$, $l=2$ 的最简单的非平凡情形中，这些方程有下面形式(局部参数 z 是最简单的):

$$\gamma_{ix}=(-1)^i(\alpha_2-\alpha_1)^{-1}, \quad \gamma_{iy}=1,$$

$$\gamma_{it}=(-1)^{i+1}\left(\frac{u}{2}+\alpha_1\alpha_2\right)(\alpha_2-\alpha_1)^{-1},$$

$$\alpha_{ix}=\alpha_i^2+u(x, y, t)+(-1)^i\Phi(\gamma_1,\gamma_2), \tag{17}$$

$$\alpha_{iy}=v(x, y, t).$$

式中 $i=1, 2$, $\alpha_1=\alpha_{11}$, $\alpha_2=\alpha_{21}$, 并用 x, y, t 代替了 x_0, y_0, t_0, $2v_x=u_y$, 而 Φ 为

$$\Phi=\xi(\gamma_2-\gamma_1)+\xi(-\gamma_2)-\xi(-\gamma_1), \tag{18}$$

在此式中，$-\zeta'=\wp(x)$，$(\wp')^2=4\wp^3+g_2\wp+g_3$，$\wp(x)$为维尔斯特拉斯椭圆函数（参看[27]）。完全可以忘记系统(17)的"来源"：由于系统(17)，函数 $u(x, y, t)$ 满足KП方程。我们利用(17)引入下面表示：

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1=y+c(x, t), \qquad \gamma_2=y-c(x, t)+c_0,\\
&w(x, y, z)=\alpha_1+\alpha_2, \qquad z(x, t)=\alpha_1-\alpha_2, \qquad (19)\\
&u(x, y, t)=-\alpha_1^2-\alpha_2^2+\varphi(x, t).
\end{aligned}
$$

采用新的表示我们得到

$$
c_x=z^{-1}, \qquad z_x=wz-2\Phi(y, c),
$$

$$
w_x=-\frac{w^2}{2}-\frac{z^2}{2}+2\varphi(x, t), \qquad c_t=\frac{1}{2z}(z^2-\varphi). \quad (20)
$$

让我们注意到，由于加法定理[27]，$Q=\Phi_c+\Phi^2$ 与 y 无关。我们把 w 表达式（通过 z_x）代入到 w_x 的方程中，从这些方程便得到：

$$
\begin{aligned}
&4\varphi(x, t)=(1+3c_{xx}^2)c_x^{-2}+4Q-2c_{xxx}c_x^{-1},\\
&\quad 8u(x, y, t)=(c_{xx}^2-1)c_x^{-2}+8\Phi c_{xx}\\
&\qquad\qquad +4c_x^2(\Phi_c-\Phi^2)-2c_{xxx}c_x^{-1}, \qquad (21)\\
&\quad 8c_t=3c_x^{-1}(1-c_{xx}^2)-4Qc_x+2c_{xxx}.
\end{aligned}
$$

量 $Q(c, c_0)=\Phi_c+\Phi^2$ 与 y 无关。(21)的任何一个解生成KП方程的解 $u(x, y, t)$。如果 $z\neq 0$ 和 $c_x=z^{-1}\neq 0$，那么关于 x 的周期性光滑函数 $c(x, t)$ 生成对 y 成周期性而对 x 成准周期性的解 $u(x, y, t)$，并且这种解没有奇异性。(21)的形如 $c(x+at)$ 的解生成形如 $u(x+at, y)$ 的孤子。为了找到这些"孤子"，我们应解方程 $c_t=ac_x$。在这种情形中可以研究方程(21)。我们将 c 取作独立变量来代替 x，并作代换 $z=h^{-2}(c)$。我们从方程(21)得到

$$
h''=h_{cc}=-\frac{\partial W(h, c)}{\partial h},
$$

$$W = -\frac{Qh^2}{2} + ah^{-2} - \frac{1}{8}h^{-6} = -\frac{Qh^2}{2} + W_0, \quad (22)$$

其中 $Q(c)$ 为周期性函数. $W_0(h)$ 的图解，对 $a \leqslant 0$ 如图 27 所示，而对 $a > 0$ 如图 28 所示.

定性分析可以得出以下结论：a) 从某一个"阈" $a \geqslant a_0 > 0$ 开始，方程(22)总是处处存在非零周期性解；所以出现"孤子"或者出现对于 x, y, t 成周期性的和非奇异的"极浅水波" $u(x + at, y)$; b) 对 $a \leqslant 0$ 情形，当(而且仅当)点 $\lambda=0$ 位于周期性势 Q 的第一个点谱以下时，则方程 (22) 处处有非零周期性解，也即方程 $h'' = Qh$ 处处有非零解. 正是这种情形才产生 KΠ 方程没有奇异性的解 $u(x + at, y)$.

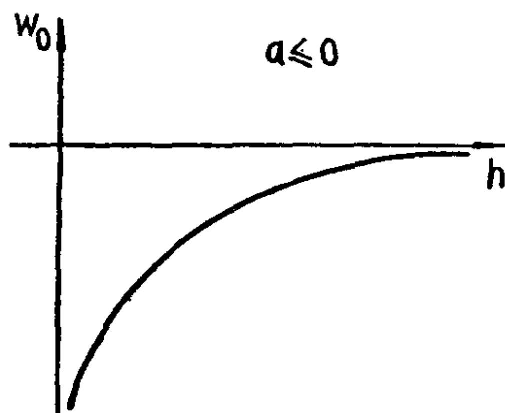


图 27. 对速度 $a \leqslant 0$ 的情形，势 W 的非线性部分.

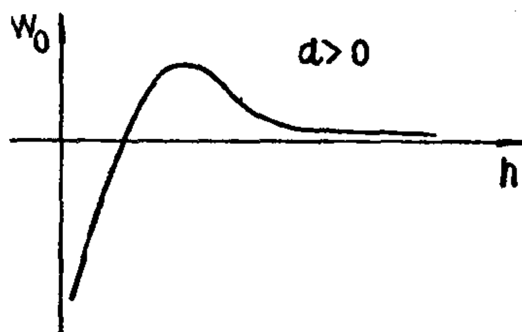


图 28. 对速度 $a > 0$ 的情形，势 W 的非线性部分.

求出 $c(x)$ (其中 $c_x = h^2(c)$)，然后再利用公式(21)，我们便从 (22) 得到 KΠ 的解. 利用 298—299 页所指出的变换，我们得到具有任意方向的解 $u(x + a_1t, y + bt)$. 令人惊异地发现，在求解方程(17)过程中产生的量 $c(x, t)$ 满足 KdV 类型的非线性方程 (21). 我们知道，这种方程应该"隐蔽同构"于普通的 KdV 方程，因为正象上面提到过的那样，包含在解的最初结构中(包含在矩阵 ψ_0 中)的函数参数 $u_0(x, t)$ 满足通常的 KdV 方程. 但这种同构迄今还没能研究透彻.

§ 9. 关于周期性 Toda 链的若干注释

在第一章 §7 中所研究的 Toda 链，乃是具有同样质量 $(m=1)$ 的粒子集合．这些粒子位于一条直线上，它们所在点的坐标为 $n+x_n$ (n 为整数)．Toda 链的哈密顿量有下面形式：

$$H(x, P)=\sum_n \frac{1}{2} p_n^2+\sum_n \exp(x_n-x_{n-1}). \qquad (1)$$

Toda 链允许 Lax 型表象(参看[28,29])，其中 L 为薛定谔算子的差分类似物．对算子 L 的谱问题有下面形式：

$$\begin{aligned} L\psi(n, E) = E\psi(n, E) &= v_n\psi(n, E) \\ &+ c_n^{1/2}\psi(n-1, E)+c_{n+1}^{1/2}\psi(n+1, E). \end{aligned} \qquad (2)$$

对周期情形我们有

$$\dot{x}_n=v_n=v_{n+N}, \quad c_{n+N}=c_n=\exp(x_n-x_{n-1}); \qquad (3)$$

对谱带的确定同在第二章 §1 中的作法相同． 许多作者曾指出，对 Toda 周期性链的研究完全类似于 KdV 方程有限带解的理论(例如，参看综合评述[6])．这种结论同样也与许多其它一些系统，非线性薛定谔方程、sin-Gordon 等等有关．同时注意下面这一情况是有益的：分立 Toda 链类型的系统不同于 KdV、非线性薛定谔方程、sin-Gordon 等等类型的连续系统．正象在第二章曾多次指出过的那样，对于 KdV 方程有限带解的理论来说，令人感兴趣的性质之一乃是在准周期性解之中实际不可能有效分解出关于 x 的且具有给定周期 T 的周期性解． n 带薛定谔算子 L 之带的边界集合 $E_0, \cdots, E_{2n}$ 形成超椭圆黎曼曲面：

$$y^2=\prod_{\alpha=0}^{2n}(E-E_\alpha).$$

对于差分算子 L 来说，分离出具有整数周期 N 的周期情

形是切实可行的. 与具有整数周期N的 Toda 链相对应的一类黎曼曲面是这样的:

$$\mu + \mu^{-1} = 2P_N(E), \tag{4}$$

式中 $P_N(E)$ 为N次多项式. 这样的黎曼曲面可以通过算子L之带的边界 E_α 给出

$$w^2 = \prod_{\alpha=1}^{2N}(E - E_\alpha) = [P_N(E) + 1][P_N(E) - 1], \tag{5}$$

式中 $2P_N(E)$ 为么模矩阵的迹(把公式(4)和(5)同公式(2.1.10)加以比较, 这里 $P_N \to a_R$). 考虑到综合评述[6]中(参看第三章 §1)对于 Toda 链公式的某种不确切性, 因此, 我们仿照[30]给出下面公式:

$$v_{n-1}(t) = \frac{d}{dt}[\ln\theta(nU + tV + W^+) - \ln\theta((n-1)U + tV + W^+)], \tag{6}$$

$$\ln c_n(t) = \ln\frac{\theta(nU + tV + W^-)}{\theta(nU + tV + W^+)} - \ln\frac{\theta((n-1)U + tV + W^-)}{\theta((n-1)U + tV + W^+)}, \tag{7}$$

式中 U, V, W 为某些向量. 很容易用和 KdV 理论同样的精确度来算出这些向量.

这一结论也同样和一般直线上的差分算子有关(参看[30, 31]). 当然, 同连续情形完全类似的也可以研究一般的准周期情形.

附注. 为了参考起见, 我们也指出 Flaschka. H., Mclauqhlin D. W. 的文章(Progr. Theor. Phys., 1976, v. 53)的优美结果, 他们的这一结果即同 KdV 有限带理论有关也同 Toda 周期链有关: 与环面"角"(可从 0 变化到 2π)共轭的作用变量有这样的形式, 即在禁带范围中, 它等于函数 $|a_R - 1|$ 图形下面的面积.